50ο ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ (Α΄ ΤΕΤΡΑΜΗΝΟ)

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ ΚΑΙ ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ: ΔΥΟ ΜΕΓΑΛΟΙ ΕΛΛΗΝΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

Ερευνητική Εργασία α΄ τετραμήνου των:

Αλέξης Σμέρος

Αναστασία Παπουτσάκη

Γιάννης Κουτέλας

Διονύσης Καραθανάσης

Ελένη Ξενόφου

Ελένη Περδετζόγλου

Θάνος Παπαδάκης

Λίνα Αλμπάνη

Μυρτώ Παναγάκου

Πέτρος Λαλουκιώτης

Σπύρος Μαρκαντωνάτος

Σπύρος Μάστορας

Στέλιος Καραχάλιος

ΑΘΗΝΑ

2011-2012

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ

Παρίσης Α. (ΠΕ 03)

Μέκκας Κ. (ΠΕ 02)

Δουλφής Γ. (ΠΕ 02)

Ευκλείδια και μη Ευκλείδια Γεωμετρία

Ιστορική Αναδρομή

Τα μαθηματικά είναι ένα **σύστημα αξιωματικό** δηλαδή είναι ένα σύστημα που αποτελείται από αξιώματα, ορισμούς και προτάσεις. Κατέληξε σε αξιωματικό σύστημα επειδή όταν η αλήθεια δεν μπορεί να προκύψει με τρόπο εμπειρικό και με την άμεση εποπτεία του σχήματος, τότε η μόνη επιλογή που μένει για να αποδειχθεί η αλήθεια είναι με **λογικούς συλλογισμούς**. Για αυτό το λόγο, η αλήθεια των προτάσεων έπρεπε να να προκύπτει από προτάσεις που ήδη είχαν αποδειχθεί, δηλαδή να είναι συνέπειες των αξιωμάτων. Συνεπώς κάθε νέα έννοια που προέκυπτε στην πορεία έπρεπε να οριστεί με ακρίβεια.

Οι Έλληνες πίστευαν όταν τα μαθηματικά και οι γνώσεις που προέκυπταν από αυτά ανήκαν σε ένα κόσμο διαφορετικό και σε αυτήν την πεποίθηση οι Έλληνες οικοδόμησαν τη γεωμετρία.

Ο **Πλάτωνας** έγραψε στην είσοδο της **Ακαδημίας** το ρητό: **'Μηδείς Αγεωμέτρητος Εισίτω'**, δίνοντας ιδιαίτερο βάρος στη σπουδή και στη γνώση της γεωμετρίας. Τα **'Στοιχεία' του Ευκλείδη** (330 – 270 π. Χ) που αποτελούνται από **13 βιβλία**, είναι το σημαντικότερο έργο στην αρχαιότητα που αποτέλεσε σταθμό στη Γεωμετρία και αναδείχθηκε σε πρότυπο μαθηματικής σκέψης. Ο διάσημος Γάλλος μαθηματικός **Jean Dieudonne** αναφέρει ότι: **Ή γεωμετρία των Αρχαίων Ελλήνων είναι ίσως το πιο εκπληκτικό πνευματικό δημιούργημα του ανθρώπου. Χάρη στους Έλληνες μπορέσαμε να οικοδομήσουμε τη σύγχρονη επιστήμη΄.**

Ο **Ευκλείδης** στα **'Στοιχεία΄** ορίζει ως παράλληλες: **΄Τις ευθείες εκείνες που ευρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και επεκτεινόμενες επ' άπειρον κι από τα δύο μέρη δε συναντιόνται σε κανένα από αυτά'**(ορισμός 23) και αμέσως διατυπώνει το διάσημο **'5ο Αίτημα'**, δηλαδή '**Εάν μια ευθεία που τέμνει δύο ευθείες σχηματίζει τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες μικρότερες από δύο ορθές , τότε οι δύο ευθείες επεκτεινόμενες επ' άπειρον συναντώνται στο μέρος που οι σχηματιζόμενες γωνίες είναι μικρότερες από δύο ορθές'.**

Σήμερα το 5ο αίτημα διατυπώνεται με την εξής μορφή: '**Από ένα σημείο εκτός ευθείας άγεται προς αυτή μία μόνο παράλληλη'**(1899 Γερμανός μαθηματικός **David Hilbert).**

Για 20 αιώνες οι μαθηματικοί ασχολήθηκαν με το 5ο αίτημα του Ευκλείδη, αυτό διότι η **Ευκλείδεια Γεωμετρία** ήταν ο μοναδικός τομέας των μαθηματικών που είχε **λογική θεμελίωση**. Χάρη στα γερά θεμέλια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, οι μαθηματικοί κατέφευγαν σε αυτή διότι τους προσέφερε μεγάλη σιγουριά και είχαν απόλυτη εμπιστοσύνη στην αλήθεια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Η εμπιστοσύνη στην αλήθεια της Ευκλείδειας γεωμετρίας επεκτάθηκε πέρα από τα μαθηματικά και την έκανε παράδειγμα θεμελίωσης άλλων επιστημών.

Πολύ νωρίς οι μαθηματικοί πίστευαν στην απόδειξη του 5ου αιτήματος του Ευκλείδη, πίστευαν πως δεν μπορεί να μην αποδεικνύεται μια πρόταση για την οποία η αντίστροφη της αποδεικνύεται σχετικά εύκολα. Δηλαδή οι μαθηματικοί προσπαθούσαν να αποδείξουν το 5ο αίτημα με βάση τις άλλες ισχύουσες προτάσεις

της γεωμετρίας. Όμως παρά τις τεράστιες προσπάθειες τους, απέτυχαν. Αποδείχθηκε ότι εκείνο που έφταιγε ήταν το πλαίσιο μέσα στο οποίο γινόντουσαν οι προσπάθειες αυτές, δηλαδή η συγκεκριμένη Ευκλείδεια Γεωμετρία.

Στις αρχές του 19ου αιώνα άρχισε να εμφανίζεται η αμφισβήτηση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με την αμφισβήτηση ότι οι μαθηματικές προτάσεις εκφράζουν απόλυτες αλήθειες. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν ερμηνεύει με το καλύτερο τρόπο την γεωμετρία της φύσης διότι η γεωμετρία της φύσης είναι διαφορετική από την Ευκλείδεια Γεωμετρία και δεν είναι κατάλληλη στην ερμηνεία των ιδιοτήτων του χώρου που μας περιβάλλει.

Ο πρώτος που κατανόησε ότι η γεωμετρία της φύσης μπορεί να είναι διαφορετική από την Ευκλείδια Γεωμετρία ήταν ο **Gauss**, όπου πίστευε πως αν αρνηθούμε το 5ο αίτημα μπορούμε να οδηγηθούμε σε μια συνεπή θεωρία που ονόμασε **μη Ευκλείδεια Γεωμετρία**. Δυστυχώς ο Gauss δεν άφησε κάποιο συστηματικό έργο πάνω στη μη Ευκλείδεια Γεωμετρία που είχε συλλάβει, εκτός από κάποια αποσπάσματα των επιστολών του.

Στις αρχές του 1830 ο Ρώσος μαθηματικός **Lobatchevsky** και ο Ούγγρος στρατιωτικός **Bolyai**, δημοσιεύουν σχεδόν ταυτόχρονα τα δύο πρώτα έργα της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας και αναγνωρίζονται ως δημιουργοί της, οι οποίοι ξεκίνησαν την συγγραφή του έργου τους με σκοπό να αποδείξουν το $5^{ο}$ αίτημα. Αναγνώρισαν πως οι απόδειξη του $5^{ου}$ αιτήματος δεν μπορεί να επιτευχθεί με την βοήθεια των υπόλοιπων 9 αξιωμάτων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και πήραν ως **υπόθεση την άρνηση του $5^{ου}$ αιτήματος** και προσπάθησαν να οδηγηθούν σε κάποια αντίθεση με βασικό πυρήνα η δημιουργία ενός άλλου αξιώματος παραλληλίας και η οικοδόμηση μιας νέας γεωμετρίας που να περιγράφει καλά τον χώρο. Τα κατάφεραν. **Θεώρησαν ότι από σημείο εκτός ευθείας άγονται δύο παράλληλες προς αυτήν.**

Το έργο του **Gauss – Lobatchevsky – Bolyai** οδήγησε στα εξής συμπεράσματα:

Α) **Το Ευκλείδειο αίτημα είναι αδύνατο να αποδειχθεί , αφού η άρνηση του δεν οδηγεί σε κάποια λογική αντίφαση.**

Β) Με την προσθήκη της αντίθετης πρότασης στα αξιώματα της Γεωμετρίας είναι δυνατό να δημιουργηθεί μια λογικά άψογη και κατανοητή γεωμετρία, διαφορετική από την Ευκλείδεια.

Γ) Η αλήθεια των αποτελεσμάτων μια τέτοιας γεωμετρίας μπορεί να διαπιστωθεί μόνο πειραματικά.

Η πανηγυρική δικαίωση των δημιουργών της μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας επισφραγίσθηκε με την πειραματική επαλήθευση βασικών προβλέψεων της **Θεωρίας της Σχετικότητας** (όπως η καμπύλωση των φωτεινών ακτίνων στο διάστημα) όπου η κλασσική Φυσική δεν μπορούσε να την εξήγηση στηριγμένη στην παραδοχή ενός απόλυτου Ευκλείδειου χώρου.

Bernhard Riemann

Ο **Γκεόργκ Φρίντριχ Μπέρναρντ Ρίμαν** ή **Ρήμαν** (**Georg Friedrich Bernhard Riemann**, 17 Σεπτεμβρίου 1826 – 20 Ιουλίου 1866) ήταν Γερμανός μαθηματικός που συνεισέφερε σημαντικά στη Μαθηματική Ανάλυση, την Τοπολογία, την Αναλυτική Θεωρία των αριθμών και τη Διαφορική Γεωμετρία, προωθώντας τη μη ευκλείδεια Γεωμετρία και ανοίγοντας έτσι τον δρόμο μεταξύ άλλων και για τη θεμελίωση αργότερα της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Κατά τον **D. Struik** ***«με τον Ρίμαν φτάνουμε στον άνθρωπο που επηρέασε περισσότερο από κάθε άλλον την πορεία των σύγχρονων Μαθηματικών».***

Μία από τις μεγαλύτερες μαθηματικές δημιουργίες του 19^ου^ αιώνα είναι **η Γεωμετρία του Riemann,** η οποία είναι εμπνευσμένη από την προώθηση ιδεών χάρη στην εμφάνιση της νέας γεωμετρίας. Η μη Ευκλείδεια Γεωμετρία του Riemann είναι περισσότερο μαθηματική δημιουργία, η περίφημη **Ελλειπτική Γεωμετρία**. O Riemann διαπίστωσε πως αν τα Ευκλείδεια Αιτήματα 1, 2 και 5 τροποποιηθούν κατάλληλα και κρατήσουμε τα Ευκλείδεια Αιτήματα 3 και 4 ως έχουν, τότε προκύπτουν τα αξιώματα μιας μη Ευκλείδειας Γεωμετρίας γνωστή ως Γεωμετρία Riemann, στην οποία ισχύει ότι: '**από ένα σημείο εκτός ευθείας δεν υπάρχει καμία παράλληλη προς αυτήν'** και στην οποία στηρίχθηκε ο **Albert Einstein** για να διατυπώσει την περίφημη **Θεωρία της Σχετικότητας**.

Ο Riemann εκτός από την αντικατάσταση του 5^ου^ αιτήματος, ήρθε αντιμέτωπος με το **2^ο^ αίτημα του Ευκλείδη 'Μία ευθεία επεκτείνεται άπειρα μακριά κατά τη διεύθυνση της'**, όπου μας λέει τι πρέπει να συμβαίνει στο φυσικό χώρο πολύ μακρύτερα από την ανθρώπινη εμπειρία. Παρόλο ταύτα το 2^ο^ αίτημα του Ευκλείδη βεβαιώνει πως μια ευθεία μπορεί να επεκταθεί απεριόριστα, για το Riemann δεν ισχύει ότι μια ευθεία έχει άπειρο μήκος, για αυτόν σημαίνει πως είναι χωρίς τέλος ή χωρίς όριο. Έτσι ο Riemann αντικατέστησε το 2^ο^ αίτημα με την εξής μορφή: **' Η ευθεία δεν έχει όρια και επειδή δεν μας λέει η εμπειρία για**

την ύπαρξη παράλληλων, η προέκταση αυτής της ευθείας μπορεί να επιστρέψει στον εαυτό της'.

Τέλος, παραθέτουμε ένα συγκριτικό πίνακα μεταξύ Ευκλείδειας Γεωμετρίας και Γεωμετρίας Riemann.

	Ευκλείδης	**Riemann**
Με δεδομένη την ευθεία ε και ένα σημείο Α έξω από την ε	Υπάρχει μία και μόνο μία ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο Α και είναι παράλληλη προς την ε	Δεν διέρχεται καμία ευθεία
Μια ευθεία	Χωρίζεται σε δύο τμήματα από ένα σημείο	Δεν χωρίζεται σε δύο τμήματα από ένα σημείο
Παράλληλες ευθείες	Ισαπέχουν	Δεν υπάρχουν
Δύο ευθείες κάθετες σε μια τρίτη	Είναι παράλληλες	Τέμνονται
Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι	Ίσο με 180^o	Μεγαλύτερο από 180^o

Ο Riemann δεν ήταν γεωμέτρης και δεν προσέγγισε την Ελλειπτική Γεωμετρία με γεωμετρικό τρόπο. Ήταν **μαθηματικός της Ανάλυσης** και χρησιμοποίησε ως υπόβαθρο της Ανάλυσης μια γεωμετρική υπόθεση και δεν ασχολήθηκε διεξοδικά με τις εφαρμογές της νέας του Γεωμετρίας.

Βιβλιογραφία

Wikipedia the free encyclopedia
el.wikipedia.org/wiki/Μπέρναρντ_Ρίμαν

Πανεπιστήμιο Αθηνών Τμήμα Μαθηματικών
http://noether.math.uoa.gr/

Η ΑΝΑΚΑΛΥΨΗ ΤΩΝ ΜΗ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΩΝ:
ΜΙΑ ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΔΡΟΜΗ ΚΑΙ ΟΙ ΕΠΙΠΤΩΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΝΝΟΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ - Χρυσούλα Κοτσοβού
http://www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_kotsobou.pdf

Σταγόνες Διδακτικής των Μαθηματικών του Μαθηματικού Πινάτση Παναγιώτη
http://www.sch.gr- http://users.sch.gr/ppinats/index.html

Σχολικό Βιβλίο Α Γυμνασίου - ΟΕΒΔ

Αλέξης Σμέρος

Γιάννης Κουτέλας

Διονύσης Καραθανάσης

Λίνα Αλμπάνη

Σπύρος Μαρκαντωνάτος

Στέλιος Καραχάλιος

Ο ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ ΚΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Από το 1883 έως το 1885 φοίτησε σε σχολεία της Ριβιέρα και του Σαν Ρέμο. Ένα χρόνο φοίτησε σε γυμνάσιο των Βρυξελλών, όπου στο μάθημα της Γεωμετρίας αισθάνθηκε την αγάπη και την κλίση που είχε για τα Μαθηματικά. Το 1886 γράφτηκε στο γυμνάσιο Ατενέ Ρουαγιάλ των Βρυξελλών, από όπου αποφοίτησε το 1891. Στο Βέλγιο τότε γινόταν διαγωνισμός μαθηματικών στον οποίο κλήθηκε η τάξη του να διαγωνιστεί για δύο χρονιές κατά σειρά και ο Καραθεοδωρή πήρε την πρώτη θέση και τις δύο χρονιές.
Στο Βερολίνο ο Καραθεοδωρή είχε την τύχη να παρακολουθήσει μαθήματα από μεγάλους μαθηματικούς όπως ο Χέρμαν Σβαρτς (Herman Schwarz), ο Γκέοργκ Φρομπένιους (Georg Frobenius), ο Έρχαρντ Σμιτ (Erhard Schmidt) και ο Λάζαρος Φουξ (Lazarus Fuchs). Ο Σμιτ το φθινόπωρο του 1901 έφυγε για το πανεπιστήμιο του Γκέτινγκεν και παρακίνησε τον Καραθεοδωρή να αποφασίσει να εγκατασταθεί κι εκείνος εκεί. Έτσι το 1902, ο Καραθεοδωρή μεταγράφηκε στο Πανεπιστήμιο του Γκέτινγκεν για να κάνει διδακτορική διατριβή υπό την επίβλεψη του Χέρμαν Μινκόβσκι (Hermann Minkowski).
Το Γκέτινγκεν εκείνη την εποχή είχε θεωρηθεί σαν το μεγαλύτερο κέντρο των Μαθηματικών και δύο διάσημοι καθηγητές, ο Νταβίντ Χίλμπερτ (David Hilbert) και ο Φέλιξ Κλάιν (Felix Klein), δίδασκαν εκεί. Αυτοί οι δύο σπουδαίοι μαθηματικοί επέδρασαν πολύ στη ζωή και στη σταδιοδρομία του ως μαθηματικού. Ο Καραθεοδωρή αναγορεύτηκε διδάκτορας στο Πανεπιστήμιο του Γκέτινγκεν το 1904 και αμέσως μετά ζήτησε να εργαστεί στην Ελλάδα. Οι αρμόδιοι όμως του απάντησαν ότι είχε ελπίδες να διοριστεί μόνο σαν δάσκαλος σε σχολεία της επαρχίας. Τότε γύρισε στη Γερμανία, όπου τον επόμενο χρόνο (Μάρτιος 1905) αναγορεύτηκε υφηγητής των Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Γκέτινγκεν. Στο ίδιο πανεπιστήμιο δίδαξε μέχρι το 1908. Την ίδια χρονιά παντρεύτηκε την τότε 24χρονη Ευφροσύνη, με την οποία απέκτησε δύο παιδιά, τον Στέφανο και τη Δέσποινα.
Από το 1909 έως το 1920 δίδαξε Μαθηματικά σε διάφορα γερμανικά ακαδημαϊκά ιδρύματα: Αννόβερο, Μπρέσλαου (Βρότσλαβ στην σημερινή Πολωνία), Γκέτινγκεν και Βερολίνο. Η φήμη του ως μαθηματικού τον έφερε σε φιλική και επαγγελματική επαφή με άλλους μεγάλους ομολόγους της εποχής του όπως ο Μαξ Πλανκ (Max Plank), ο Άλμπερτ Αϊνστάιν, ο Σβαρτς, ο Φρομπένιους, ο Σμιτ, ο Ντάβιντ Χίλμπερτ, ο Κλάιν, κ.ά.
Διαφορική εξίσωση είναι μια μαθηματική εξίσωση που συσχετίζει τις τιμές μιας άγνωστης συνάρτησης μιας ή περισσότερων μεταβλητών και των παραγώγων της πρώτου, δεύτερου ή ανώτερου βαθμού. Οι διαφορικές εξισώσεις παίζουν προεξάρχοντα ρόλο στη Φυσική. Επίσης έχουν πολύ σημαντικές εφαρμογές στην Τεχνολογία, τα Οικονομικά, τη Βιολογία και άλλα επιστημονικά πεδία.
Η έννοια της μεταβλητής είναι αρχική έννοια για τα Μαθηματικά, δηλαδή τη δεχόμαστε αξιωματικά, χωρίς απόδειξη.
Στα μαθηματικά, θεωρία συνόλων ή συνολοθεωρία είναι η θεωρία που μελετά τα σύνολα, σε αντίθεση με τις υπόλοιπες μαθηματικές θεωρίες που εξετάζουν δομές, δηλαδή σύνολα εφοδιασμένα με συναρτήσεις και σχέσεις (π.χ. ομάδες, τοπολογικοί χώροι). Αν και οποιοσδήποτε τύπος από αντικείμενα μπορεί να ορίσει σύνολο, η θεωρία συνόλων εφαρμόζεται συνήθως σε αντικείμενα σχετικά με τα μαθηματικά.
Η τακτική του Καραθεοδωρή είναι βέβαια κλασική, όμως η μαθηματική του διορατικότητα τη μετατρέπει σε αποτελεσματική. Στην ουσία, από άποψη στρατηγικής, λειτουργεί στο επιχειρησιακό. Καταπιάνεται με την ανώτερη ανάλυση, μέσω της θεωρίας μέτρου και την εξετάζει με τις σ- άλγεβρες. Αυτό όμως δεν του

αρκεί και ενσωματώνει αυτή την προσέγγιση στη νέα θεωρία των Somas. Αυτή η γενικότερη άποψη του θέματος έχει το πλεονέκτημα να έχει μια ξεκάθαρη αξιωματική που προσφέρει μια ισχυρή θεμελίωση ακόμα και με την άποψη του Hilbert.

Η μαθηματική ανάλυση είναι ένα από τα βασικά πεδία των μαθηματικών, το οποίο ασχολείται με την έννοια της απόστασης. Θεμελιωτές της ήταν ο Γκότφριντ Βίλχελμ Λάιμπνιτς και ο Ισαάκ Νεύτων, οι οποίοι την ανακάλυψαν ανεξάρτητα στα τέλη του 17ου αιώνα.
Ο Καραθεοδωρή άρχισε να συγγράφει επιστημονικές μελέτες ήδη από τον καιρό που εργάζονταν ως μηχανικός στην Αίγυπτο. Οι έρευνες του, τις οποίες δημοσίευσε κυρίως στα γερμανικά, συνθέτουν ένα τεράστιο και πολύπλευρο έργο, το οποίο τον κατατάσσει μεταξύ των μεγαλύτερων μαθηματικών.
Αρχικά ασχολήθηκε με τον Λογισμό των Μεταβολών και η διδακτορική διατριβή του (Γκέτινγκεν, 1904) φέρει τον τίτλο «Περί των ασυνεχών λύσεων στον Λογισμό των Μεταβολών». Στην συνέχεια, καταπιάστηκε με όλους σχεδόν του κλάδους των Μαθηματικών: θεωρία πραγματικών συναρτήσεων, θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων, διαφορικές εξισώσεις, θεωρία συνόλων και διαφορική γεωμετρία, σύμμορφες απεικονίσεις κ.ά.
Οι μαθηματικές του αποδείξεις χαρακτηρίζονται από «κομψότητα και απλότητα», αλλά και αυστηρότητα που δίνει απόλυτη ασφάλεια στα συμπεράσματα που προκύπτουν. Με την συμβολή του στον Λογισμό των Μεταβολών βοήθησε στην ανάπτυξη της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας προκαλώντας τον θαυμασμό του ίδιου του Αϊνστάιν:
«Αν θέλετε να μπείτε στον κόπο να μου εξηγήσετε ακόμα και τους κανονικούς μετασχηματισμούς θα βρείτε έναν ευγνώμονα και ευσυνείδητο ακροατή. Αν όμως λύσετε και το πρόβλημα των κλειστών γραμμών του χρόνου, θα σταθώ μπροστά σας με σταυρωμένα χέρια. Πίσω από αυτό υπάρχει κρυμμένο κάτι που είναι αντάξιο του ιδρώτα των καλυτέρων.» — Επιστολή του Αϊνστάιν προς τον Καραθεοδωρή, 1916
Η συμβολή του στην Θεωρητική Φυσική ήταν ουσιαστική στην μαθηματική θεμελίωση τομέων της Φυσικής όπως η Θερμοδυναμική, η Γεωμετρική Οπτική, η μηχανική και η Σχετικότητα.
Το 1909 δημοσίευσε μία εργασία με τίτλο «Έρευνα επί των βάσεων της Θερμοδυναμικής» στο περιοδικό Mathematische Annalen. Η εργασία αυτή έγινε ευρέως γνωστή στους κύκλους των φυσικών μόνο το 1921 από ένα σχετικό άρθρο του Μαξ Μπορν (Max Born) στο περιοδικό Physikalische Zeitschrift. Στην εργασία του 1909 περιέχεται και η περίφημη Αρχή Καραθεοδωρή που λέει ότι
«σε κάθε κατάσταση θερμοδυναμικής ισορροπίας ενός συστήματος υπάρχουν μερικές απείρως γειτονικές καταστάσεις ισορροπίας στις οποίες δεν μπορούμε να φτάσουμε με αδιαβατικές μεταβολές».
Με απλά αξιώματα και υποθέσεις, ο Καραθεοδωρή κατόρθωσε να φτάσει στον ορισμό θεμελιωδών θερμοδυναμικών μεγεθών όπως της εντροπίας, χωρίς καμία αναφορά σε θερμοδυναμικούς κύκλους κ.λπ.

ΠΗΓΕΣ:
wikipedia
lygeros.gr
Πέτρος Λαλουκιώτης
Σπύρος Μαρκαντωνάτος
Σπύρος Μάστορας

14/1/2012

Ο ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ ΚΑΙ Η ΣΧΕΣΗ ΤΟΥ ΜΕ ΤΗ ΦΥΣΙΚΗ

[Πληκτρολογήστε τον υπότιτλο του εγγράφου] |

Η ΒΙΟΓΡΑΦΙΑ ΤΟΥ Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ

- Ο Κων/νος Καραθεοδωρή υπήρξε μία σπανίζουσα μορφή στην ιστορία της επιστήμης, όπου η δυσθεώρητου ύψους επιστημονική του οντότητα, συναγωνίζεται αυτήν που αφορά τον άνθρωπο Καραθεοδωρή, τον φιλόστοργο οικογενειάρχη, τον σεμνό ώριμο πολίτη της κοινωνίας, τον φιλόπατρη στο επίπεδο του άδολου και ανιδιοτελούς οραματιστή.

- Είναι γόνος ενός ισχυρού μεγαλεπήβολου γενεαλογικού δέντρου με ρίζες στην Αδριανούπολη της Ανατολικής Θράκης.

Ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή γεννιέται το 1873 στο Βερολίνο στις 13 Σεπτεμβρίου. Ο πατέρας του ήταν ο Στέφανος Καραθεοδωρη ενώ η μητέρα του η Δέσποινα Πετροκοκκινου και κατάγονταν από τη Χίο.

Το λυκαυγές της εμβέλειας το συναντούμε στα μαθητικά του τετράδια. Διαβάζουμε σε αυτόγραφη σημείωση του Ιουλίου Βερν που του γράφει: Στον κ. Kostia Καραθεοδωρή πανευτυχής που μπόρεσα, περνώντας από τις Βρυξέλλες, ν' αφήσω αυτήν τη μαρτυρία όλης μου της συμπάθειας. .

Σε άλλο τετράδιο ο καθηγητής του Bourgaults τού γράφει : στον νεαρό μου φίλο Kostia, ο οποίος θα γίνει, αν συνεχίσει έτσι, ένας μοντέρνος Ευκλείδης !!! 1η Μαΐου 1888.

Οι πρώτες διακρίσεις έρχονται για τον Κωνσταντίνο σε ηλικία δεκαέξι ετών όπου παίρνει το πρώτο βραβείο σε εθνικό διαγωνισμό Μαθηματικών του Βελγίου επί δύο συνεχή έτη.

Οι πρώτες σπουδές του είναι στη στρατιωτική σχολή μηχανικών του Βελγίου τις οποίες ενισχύει στο Παρίσι και το Λονδίνο. Το 1898 καταλαμβάνει σπουδαία θέση με προοπτική σε μεγάλα αρδευτικά έργα του Νείλου, όπως το φράγμα του Ασιούτ και του Ασουάν.

Ένα βράδυ, ενώ μελετά τα αγαπημένα του Μαθηματικά, προσπαθεί να λύσει κάποια απορία που του δημιουργήθηκε. Την επόμενη έπρεπε να κάνει κάποιες μετρήσεις στην πυραμίδα του Χέοπος. Όμως το μυαλό του ήταν στην αναζήτηση της λύσεως του προβλήματος. Τότε συνειδητοποιεί οριστικά την μεγάλη γοητεία που ασκούν πάνω του τα μαθηματικά. Έτσι παίρνει τη μεγάλη απόφαση να εγκαταλείψει το επάγγελμα του μηχανικού και τη σπουδαία εργασία. Αυτή ήταν και η σημαντικότερη καμπή στην ιστορία του Κ. Καραθεοδωρή, την οποία ο ίδιος περιγράφει ως εξής στις αυτοβιογραφικές του σημειώσεις.

«Η οικογένεια μου, οι παλιοί μου φίλοι, Δημήτριος Βικέλας και Μάρκος Δραγούμης, έβρισκαν το σχέδιό μου, να εγκαταλείψω μια εξασφαλισμένη θέση με πολλές δυνατότητες για το μέλλον, περισσότερο από κωμικό. Εγώ ο ίδιος δεν ήμουν ουδόλως πεπεισμένος, ότι αυτό το σχέδιο θα πετύχει και θα αποφέρει καρπούς. Δεν μπορούσα όμως να αντισταθώ στην καταναγκαστική ιδέα, ότι μόνον η ανεμπόδιστη ενασχόληση με τα Μαθηματικά έδινε στη ζωή μου το περιεχόμενό της».

Έτσι στην ηλικία των εικοσιεπτά ετών λαμβάνει τη μεγάλη απόφαση της ζωής του που συνοδεύεται από μία επίσης σπουδαία: να σπουδάσει Μαθηματικά στο Βερολίνο και κατόπιν στη Γοττίγγη που ήταν το δεσπόζον μαθηματικό κέντρο ανά τον κόσμο. Ο ίδιος ο Κ. Καραθεοδωρή γι’ αυτήν την απόφασή του είπε πως «επρόκειτο περί της μεγαλυτέρας, εις ολκήν συνεπειών, αποφάσεως, ήν ποτέ έλαβον εις την ζωήν μου».

Άλλωστε αρκετοί και μεγάλοι επιστήμονες μελλοντικά αναφέρθηκαν σε ομιλίες τους και σημειώσεις τους στη σημαντική αυτή απόφαση του Καραθεοδωρή που έμελλε να προσφέρει τόσα πολλά στην επιστήμη, αναδεικνύοντάς τον έτσι έναν εκ των επιφανέστερων επιστημόνων του εικοστού αιώνα.

Όπως ήταν επόμενο, η πρόοδός του ήταν ραγδαία και η αναρρίχηση στα αξιώματα της επιστημονικής κοινότητας ανεμπόδιστη.

Το ότι είναι αστέρι λαμπερό στον ουρανό της επιστήμης το παρατηρούμε με την διδακτορική του διατριβή με τίτλο «Περί ασυνεχών λύσεων στο λογισμό των μεταβολών» η οποία συνοδεύεται, με έπαινο που γράφει «αγχίνοια του εφευρίσκειν περιφανής».

Ο επιβλέπων καθηγητής Minkowski στην αξιολόγησή του γράφει: «Η εργασία ανήκει στις καλύτερες μαθηματικές διατριβές που έχουν υποβληθεί στη σχολή».

Ο Felix Klein πριν ακόμη εξεταστεί για το διδακτορικό του, του προτείνει να γράψει και υφηγεσία ενώ με πρόταση του David Hilbert πριν από τις προβλεπόμενες ημερομηνίες, αποκτά το δικαίωμα «του διδάσκειν».

Είναι τόσο σπουδαίοι οι τρεις προαναφερθέντες μαθηματικοί και ακόμη σπουδαιότεροι οι πρόδρομοι αυτής της θεωρίας όπως ο Bernoulli, Euler και Gauss ώστε η αξιολόγησή τους για την διατριβή του Κ. Καραθεοδωρή να αποκτά πολύ μεγάλο κύρος και ύψιστη αξία.

Επεδίωκε να είναι ποιοτικός ο χρόνος που αφιέρωνε στην οικογένειά του. Διαρκώς τους δίδασκε να έχουν αξίες, ιδανικά, να αγαπάνε τη δουλειά και πάνω από όλα την Ελλάδα. Πιστός στα ελληνοχριστιανικά ιδεώδη ανέθρεψε τα παιδιά του με τις παραδόσεις και τις αρχές που ο ίδιος ανατράφηκε .

Ως δάσκαλος χάραξε την ανεξίτηλη φυσιογνωμία στη μνήμη των μαθητών του, γιατί, όπως και στα παιδιά του, ήξερε να συνδυάζει τέλεια την αγάπη με την παιδαγωγική αυστηρότητα. Όταν αναχωρούσε από τη Γοττίγγη για το Βερολίνο, οι μαθητές του που τον φώναζαν χαϊδευτικά «Cara», οργάνωσαν ειδική τελετή, στην οποία του έγραψαν και του απάγγειλαν ποίημα τριάντα οκτώ στροφών, εξυμνώντας τα μεγάλα προτερήματα του δασκάλου τους και περιέγραφαν τη λύπη τους για τον αποχωρισμό

Όλος ο βίος και η πολιτεία του Κ. Καραθεοδωρή διέπονται από διαρκή δράση με σεμνότητα, ταπείνωση, ανιδιοτέλεια και μεγαλοψυχία που εκπλήσσει κυριολεκτικά την επιστημονική κοινότητα.

Μέσα από αυτή τη λαμπρή επιστημονική καριέρα ξεχωρίζει και η σχέση του με τον Αϊνστάιν, όπου μέσα από την αλληλογραφία των δύο αυτών ανδρών που αρχίζει τον Σεπτέμβρη του 1916 προκύπτει η μεγάλη συμβολή του Κ. Καραθεοδωρή σε 3 δυσκολίες που συνάντησε στη διατύπωση της γενικής θεωρίας της σχετικότητας. Ο Αϊνστάιν αναγνώρισε την βοήθεια που δέχτηκε από τον Κ. Καραθεοδωρή, όπως προκύπτει από την αλληλογραφία των δύο επιστημόνων

Η εμβέλειά του ανδρώνεται με το έργο του που τον κατατάσσει στους αστέρες του ουρανού της μαθηματικής επιστήμης.

Γι’ αυτό το έργο ο καθηγητής Lars του Harvard σημειώνει: «Ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή ήταν ένας από τους αρχηγούς μαθηματικούς οι οποίοι στο πρώτο μισό του 20ου αιώνα δημιούργησαν τα θεμέλια για τη μελλοντική ανάπτυξη των μαθηματικών που κινδύνευαν να παραμείνουν στάσιμα».

Εδώ πρέπει να σκεφθούμε και τη συμβολή στη θεωρητική φυσική, τόσο γόνιμη για την αποσαφήνιση των λογικών θεμελιωδών βάσεων, την οποία προσέφερε ο Καραθεοδωρή με τις εργασίες του για τις θεμελιώδεις βάσεις της θερμοδυναμικής και την αξιωματική της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας

Το 1919 ο Ελληνικός στρατός απελευθερώνει την Ιωνία και οι Ελληνικές αρχές εγκαθίστανται στη Σμύρνη. Ο Ελευθέριος Βενιζέλος καλεί τον Κ. Καραθεοδωρή στο σπίτι του για να του αναθέσει την οργάνωση του πανεπιστημίου της.

Το 1929 ο Βενιζέλος ξανακαλεί αυτή τη φορά από το Μόναχο τον Κ. Καραθεοδωρή για την διοργάνωση των πανεπιστημίων Αιγαίου, Αθηνών – Θεσσαλονίκης.

Το 1936 θεσπίζεται το βραβείο Fields για τα μαθηματικά. Είναι διεθνώς αναγνωρισμένο το κύρος του βραβείου Fields στα Μαθηματικά και η συμβολή του στην ανάπτυξη της μαθηματικής επιστήμης.

Το βραβείο Fields απονέμεται κάθε τέσσερα χρόνια κατά τη διάρκεια διεθνούς συνεδρίου. Αποδέκτες είναι μαθηματικοί κάτω των σαράντα χρόνων, ενώ η επιτροπή αξιολόγησης απαρτίζεται από κορυφαίους μαθηματικούς αναγνωρισμένου κύρους.

Το πολύ σημαντικό για μας τους Έλληνες είναι ότι ο Κ. Καραθεοδωρή ήταν ο πρόεδρος της κριτικής επιτροπής στην πρώτη απονομή, παρότι δεν υπήρξε ποτέ μέχρι σήμερα κάποιος Έλληνας που να πήρε το βραβείο Fields. Αυτό καταδεικνύει το ανυπέρβλητο κύρος του μεγάλου Έλληνα μαθηματικού.

Το 1936 σε μία εκδήλωση για τα 400 χρόνια από την ίδρυση της μαθηματικής εταιρείας στην Αμερική η παρουσία του Καραθεοδωρή συγκεντρώνει ενθουσιώδες ακροατήριο 1000 ατόμων όπου γίνεται και ειδική εκδήλωση προς τιμήν του.

Στις 2 Φεβρουαρίου το 1950 αναγγέλλεται επίσημα στην ολομέλεια της Ακαδημίας Αθηνών ο θάνατός του.

Ο ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ ΚΑΙ ΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΤΗΣ ΣΜΥΡΝΗΣ

Ο Κωνσταντίνος Καραθεοδωρη παρόλο που ήταν δοσμένος στα μαθηματικά η καταγωγή του (προερχόταν από οικογένεια που ασχολούταν με την πολιτική) δεν του επέτρεπε να αδιαφορεί για τα κοινά. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα τον Ιούλιο του 1920 να ιδρύσει το Πανεπιστήμιο της Σμύρνης ,χωρίς να τον ενδιαφέρει που με αυτόν τον τρόπο εγκατέλειπε την αξιοζήλευτη σταδιοδρομία που του εξασφάλιζε τη θέση του τακτικού καθηγητή σε ένα από τα καλυτέρα Πανεπιστήμια του κόσμου, το Πανεπιστήμιο του Μονάχου. Αυτή τη θέση την άφησε για να γυρίσει στη πατρίδα του και να προσφέρει της γνώσεις του σε αυτή.

Ο ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ ΚΑΙ Η ΣΧΕΣΗ ΤΟΥ ΜΕ ΤΗ ΦΥΣΙΚΗ

Ο Καραθεοδωρη εκτός από την κλίση του προς τα Μαθηματικά είχε κλίση και μεγάλη αγάπη και στη Φυσική. . Έτσι δεν είναι ίσως τυχαίο που ο Καραθεοδωρής, όταν μετέβη το 1900 στο Βερολίνο για να σπουδάσει μαθηματικά, εκτός από τους μαθηματικούς καθηγητές του Frobenius, Schwarz και Schmidt, παρακολούθησε μαθήματα φυσικής από τον μεγάλο φυσικό Max Planck. Το έργο του στη θερμοδυναμική δεν πρέπει να είναι άσχετο με αυτή την επαφή. Ο ίδιος ο Planck τον υποδέχθηκε με έναν εμπνευσμένο λόγο το 1919, όταν ο Καραθεοδωρής έγινε μέλος της Πρωσικής Ακαδημίας Επιστημών. Εκτος από την θερμοδυναμικη ο Καραθεοδωρη ασχοληθηκε και με την γεωμετρικη οπτική, την μηχανική καθώς και με την θεωρία της σχετικότητας σε συνεργασία με τον Αϊνστάιν.

ΤΟ ΕΡΓΟ ΤΟΥ Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ ΣΤΗ ΦΥΣΙΚΗ

Η ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ

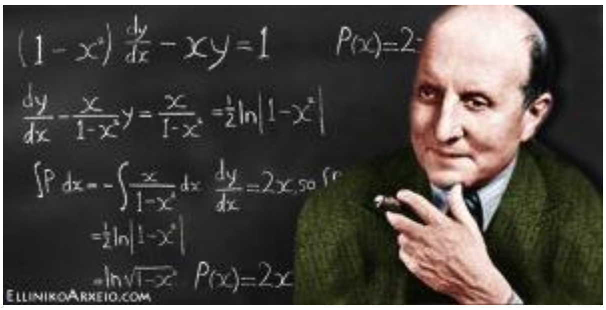
ΘΕΡΜΟΔΙΝΑΜΙΚΗ ΚΑΙ ΤΑ ΑΞΙΩΜΑΤΑ ΤΟΥ ΚΑΡΑΘΕΟΩΡΗ

Το άρθρο του James Serrin με τίτλο Conceptuals Analysis of the Classical Second Laws of Thermodynamics, επικεντρώνεται στα θεμελιακά προβλήματα των διαφόρων προτάσεων του δεύτερου νόμου της θερμοδυναμικής. Εξετάζει πρώτα την πρόταση του Clausius, ύστερα εκείνη του Kelvin, την παραλλαγή του Planck, τη νέα πρόταση του Καραθεοδωρή και προτείνει μια νέα μορφή που γενικεύει τους ορισμούς του Clausius και του Kelvin. Σε αυτήν την προσπάθεια αξιολογεί και τη συμβολή του Καραθεοδωρή. Διευκρινίζει ότι η πρότασή του έγινε μετά από παράκληση του Born που του ζητούσε να ασχοληθεί με τα θεμέλια της θερμοδυναμικής. Ο Serrin επισημαίνει σωστά ότι ο ορισμός του Καραθεοδωρή εφαρμόζεται σε ένα περιορισμένο πλαίσιο όπου δίνει τα ίδια αποτελέσματα με τους ισοδύναμους ορισμούς του Clausius και του Kelvin. Όμως οι Boyling, Buchdahl, Cooper και Zelenik γενίκευσαν τις ιδέες του Καραθεοδωρή για να εφαρμοστούν σ' ένα γενικότερο πλαίσιο. Βέβαια, αυτό δημιουργεί άλλα υπολογιστικά προβλήματα, αλλά και εννοιολογικά. Σε κάθε περίπτωση, το έργο του Καραθεοδωρή γίνεται όλο και πιο κατανοητό. Ξεφεύγει από την απλή μίμηση των προηγούμενων ορισμών. Δεν αποτελεί μια ριζοσπαστική καινοτομία, αλλά αποδεικνύεται ουσιαστικό για την εξέλιξη της θερμοδυναμικής. Επιτρέπει μια καλύτερη κατανόηση των θεμελίων της και οδηγεί σε νέες έννοιες μεταβλητών θέσεων, στην ανάγκη διευκρίνισης του διαστήματος και των διαδικασιών, αλλά και στην ένταξη της τοπολογίας στον χώρο της θερμοδυναμικής. Ο ίδιος ο Serrin προτιμά μια άλλη μορφή του δεύτερου νόμου για να αποφύγει τις περιπλοκές του ορισμού του Καραθεοδωρή. Όμως αξιωματικά, το πλαίσιο σύγκρισης των δύο ορισμών δεν είναι τόσο εύκολο. Κανένας ορισμός δεν γενικεύει τον άλλο. Και για τους δύο υπάρχει υπο-πλαίσιο σύγκρισης όπου ο καθένας ενσωματώνει τα αποτελέσματα του άλλου. Σίγουρα, ο ορισμός του Serrin παρουσιάζεται ως πιο προσιτός, όμως δεν είναι μαθηματικά ανώτερος από εκείνον του Καραθεοδωρή. Γενικεύει μεν τους ορισμούς του Clausius και του Kelvin μέσω μιας ιδέας-κλειδί του Planck, όμως παραμένει κλειστός. Ενώ ο ορισμός του Καραθεοδωρή, αν και πιο δύσκολος με την εισαγωγή της τοπολογίας, ανοίγει νέους ορίζοντες για την έρευνα των δομικών στοιχείων της θερμοδυναμικής. Η προσφορά του Καραθεοδωρή δεν φαίνεται μόνο από τις ευκολίες που παρέχει σε αυτόν τον θεμελιακό τομέα της φυσικής, αλλά και από τις δυσκολίες και τις προκλήσεις της, διότι το έργο του Καραθεοδωρή δεν βασίζεται στην ευκολία, αλλά στην ομορφιά της δυσκολίας.

ΑΡΧΗ ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ

«**Αρχή Kelvin***:* δεν είναι δυνατή κυκλική διεργασία συστήματος, με μοναδικό αποτέλεσμα την αφαίρεση θερμότητας από κάποιο σώμα και την μετατροπή της σε *ισοδύναμο έργο».*
«**Αρχή Clausius***:* δεν είναι δυνατή κυκλική διεργασία με μοναδικό αποτέλεσμα τη μεταφορά θερμότητας από το ψυχρότερο στο θερμότερο σώμα».
*«***Θεώρημα Carnot***:* με κάθε σύστημα είναι συνυφασμένες δυο συναρτήσεις συντεταγμένων του, η S και η T, από τις οποίες η T είναι συνάρτηση της εμπειρικής θερμοκρασίας θ μόνο. Οι συναρτήσεις είναι τέτοιες, ώστε σε οποιαδήποτε απειροστή αντιστρεπτή διεργασία του συστήματος να ισχύει dq=TdS».
*«***Αρχή Καραθεοδωρή**: Εις εκάστην γειτονίαν δεδομένης καταστάσεως συστήματος υπάρχουν καταστάσεις μη προσιταί εκ ταύτης δι' αδιαβατικής διεργασίας αντιστρεπτής ή μη»

Ο **<u>Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή</u>** υπήρξε ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς του εικοστού αιώνα, με συνεισφορά εκτός των άλλων και στη Φυσική. Όσοι υπήρξαν φοιτητές του Φυσικού τμήματος του Πανεπιστημίου Αθηνών – τουλάχιστον μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 80-, έβλεπαν για πρώτη φορά ένα ελληνικό όνομα συνδεδεμένο με νόμο της (μετά τον Γαλιλαίο) Φυσικής, όταν συναντούσαν την «**αρχή Καραθεοδωρή**» στο βιβλίο «Χημική Θερμοδυναμική» του **Θ. Ν. Γιαννακόπουλου -** στο μάθημα Φυσικοχημεία του δευτέρου έτους.



Με την αρχή Καραθεοδωρή επαναδιατυπώνεται ο σημαντικότερος νόμος της Φυσικής – **ο δεύτερος νόμος της θερμοδυναμικής.** Ακολουθεί η περιγραφή των θερμοδυναμικών ιδεών του Καραθεοδωρή σύμφωνα με τη «Χημική Θερμοδυναμική» Θ. Ν. Γιαννακόπουλου: "…..Η ύπαρξη των συναρτήσεων της θερμοδυναμικής θερμοκρασίας και εντροπίας αποδεικνύεται στη βάση της διατύπωσης Carnot- Kelvin- Clausius. Κύρια χαρακτηριστικά της διατύπωσης αυτής είναι τα ακόλουθα: όσο και η αρχή Clausius αποτελούν γενικεύσεις που προκύπτουν από το αδύνατο της κατασκευής μηχανών (κυκλικών διεργασιών). Έτσι ο δεύτερος νόμος θεμελιώνεται σύμφωνα με τις αρχές που διέπουν τις θερμικές και τις ψυκτικές μηχανές. Αυτό δημιουργεί πολλές φορές την εντύπωση ότι η θερμοδυναμική περιορίζεται κυρίως σε τεχνολογικά προβλήματα. Πρέπει εν τούτοις να τονισθεί το γεγονός ότι τα πειραματικά δεδομένα στα οποία στηρίζονται οι αρχές Kelvin και Clausius στηρίζονται, είναι άφθονα και εύκολα κατανοητά, η δε μαθηματική τεχνική για την απόδειξη του θεωρήματος Carnot είναι μάλλον απλή. Μειονεκτεί όμως, από θεωρητικής πλευράς, στο γεγονός ότι δεν υπάρχει σαφής διαχωρισμός μεταξύ του φυσικού και μαθηματικού περιεχομένου του δεύτερου νόμου της θερμοδυναμικής, δηλαδή μεταξύ των αρχών Kelvin και Clausius αφενός και του θεωρήματος Carnot αφετέρου. Η μετάβαση από τις αρχές στο θεώρημα γίνεται με τρόπο μάλλον συνεχή, η δε ακολουθούμενη μέθοδος είναι η μέθοδος του μαύρου κουτιού. Στη μέθοδο αυτή η παρακολούθηση όσων συμβαίνουν στο σύστημα στηρίζεται σε μετρήσεις ποσοτήτων που τροφοδοτούν το κουτί και ποσοτήτων που εξέρχονται απ' αυτό. Το σύστημα αυτό καθαυτό παρακολουθείται μάλλον ατελώς. Στη συνέχεια θα επαναδιατυπώσουμε τον δεύτερο νόμο της θερμοδυναμικής στη βάση της αρχής που οφείλεται στον Καραθεοδωρή και είναι γνωστή ως αρχή Καραθεοδωρή.

Τα κύρια χαρακτηριστικά αυτής της αρχής είναι τα παρακάτω: σαφής και πλήρης διαχωρισμός του φυσικού από το μαθηματικό περιεχόμενο του νόμου, λεπτομερέστερη παρακολούθηση του συστήματος, αλλά και μεγαλύτερη χρήση μαθηματικών και τέλος απλούστερη διατύπωση της αρχής (με την έννοια ότι αυτή προκύπτει από την αδυναμία πραγματοποίησης διεργασιών απλού τύπου), βασιζόμενη όμως σε περιορισμένο αριθμό πειραματικών δεδομένων. Οι δυο μέθοδοι είναι μερικώς τουλάχιστον, αντίστροφοι.

Η πρώτη με βάση το φυσικό περιεχόμενο του νόμου αποδεικνύει την ύπαρξη της

συνάρτησης της θερμοδυναμικής θερμοκρασίας και εντροπίας και επομένως την ύπαρξη αδιαβατικών επιφανειών.
Η δεύτερη αντίθετα χρησιμοποιεί ως αρχική διατύπωση την ύπαρξη αδιαβατικών επιφανειών. Οι συναρτήσεις θερμοδυναμικής θερμοκρασίας και εντροπίας προκύπτουν συγχρόνως, διαμέσου καθαρής μαθηματικού οδού, ως αναγκαία συνέπεια της ύπαρξης των αδιαβατικών επιφανειών……

Γραμμικές διαφορικές μορφές

Βασικό στοιχείο στη διαμόρφωση του δεύτερου νόμου της θερμοδυναμικής δια της αρχής του Καραθεοδωρή αποτελούν εξισώσεις της μορφής

$$dL = \sum_{1}^{n} Y_i \, dx_i \quad (1)$$

Όπου dx_i τα διαφορικά n ανεξάρτητων μεταβλητών x ($x_i = x_1, \ldots, x_n$) και Y_i συνεχείς συναρτήσεις των μεταβλητών x. Οι εξισώσεις αυτής της μορφής είναι γνωστές ως γραμμικές διαφορικές μορφές ή μορφές Pfaff. Στη συνέχεια διερευνώνται σύντομα κυρίως τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά τους.
Η εξίσωση

$$dL = \sum_{1}^{n} Y_i \, dx_i = 0 \quad (2)$$

Ονομάζεται ολική διαφορική εξίσωση ή εξίσωση Pfaff.
Στην περίπτωση κατά την οποία το dL, είναι τέλειο διαφορικό, η εξίσωση (2) έχει προφανώς λύση της μορφής:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = C \quad (3)$$

Μια άλλη περίπτωση κατά την οποία η εξίσωση (2) έχει λύση στην μορφή (3) είναι εκείνη όπου το dL, δεν είναι μεν τέλειο διαφορικό συνάρτησης, είναι όμως ανάλογο διαφορικού συνάρτησης. Υπάρχουν δηλαδή δυο συναρτήσεις λ και R, των ανεξάρτητων μεταβλητών x, τέτοιες ώστε να ισχύει:

$$\mathrm{dL} = \lambda \, \mathrm{dR} \quad (4)$$

Στην περίπτωση τριών μεταβλητών x_1, x_2, x_3συνδυάζοντας τις εξισώσεις (1) και (4) μπορούμε να γράψουμε:

$$dR = \frac{Y_1}{\lambda} dx_1 + \frac{Y_2}{\lambda} dx_2 + \frac{Y_3}{\lambda} dx_3 \quad (5)$$

Δεδομένου ότι το dR θεωρήθηκε τέλειο διαφορικό θα ισχύει η συνθήκη του Euler

$$\frac{\partial (Y_i/\lambda)}{\partial x_j} = \frac{\partial \left(Y_j/\lambda\right)}{\partial x_i} \quad (i, j = 1,2,3)$$

Η οποία αν εφαρμοστεί στην (5) δίνει τις παρακάτω τρεις εξισώσεις

$$\left.\begin{aligned} \lambda\left(\frac{\partial Y_1}{\partial x_2}-\frac{\partial Y_2}{\partial x_1}\right) &= Y_1\frac{\partial\lambda}{\partial x_2}-Y_2\frac{\partial\lambda}{\partial x_1} \\ \lambda\left(\frac{\partial Y_2}{\partial x_3}-\frac{\partial Y_3}{\partial x_2}\right) &= Y_2\frac{\partial\lambda}{\partial x_3}-Y_3\frac{\partial\lambda}{\partial x_2} \\ \lambda\left(\frac{\partial Y_3}{\partial x_1}-\frac{\partial Y_1}{\partial x_3}\right) &= Y_3\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}-Y_1\frac{\partial\lambda}{\partial x_3} \end{aligned}\right\}(7)$$

Πολλαπλασιάζοντας τις τρεις αυτές εξισώσεις με Y_1, Y_2 και Y_3αντίστοιχα και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$$Y_3\left(\frac{\partial Y_1}{\partial x_2}-\frac{\partial Y_2}{\partial x_1}\right)+Y_1\left(\frac{\partial Y_2}{\partial x_3}-\frac{\partial Y_3}{\partial x_2}\right)+Y_2\left(\frac{\partial Y_3}{\partial x_1}-\frac{\partial Y_1}{\partial x_3}\right)=0 \quad (8)$$

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί την ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη των συναρτήσεων λ (ολοκληρωτικού παράγοντα) και R, έτσι ώστε να ισχύει η εξ. (5). Στην περίπτωση δυο μεταβλητών η συνθήκη (8) ισχύει πάντα, όπως εύκολα αποδεικνύεται αν θέσουμε σ' αυτή $Y_3 = Y_1$ και $x_3 = x_1$. Τούτο σημαίνει ότι η εξίσωση:

$$Y_1\, dx_1 + Y_2\, dx_2 = 0 \quad (9)$$

έχει πάντοτε λύση της μορφής (4).

Αν η ανεξάρτητες μεταβλητές είναι περισσότερες από τρεις, απλά θα προκύψουν περισσότερες σχέσεις της μορφής (8), προφανώς μια για κάθε τριάδα μεταβλητών.

Στην περίπτωση που υπάρχουν περισσότερες από δυο ανεξάρτητες μεταβλητές δεν είναι πάντοτε δεδομένο ότι η διαφορική εξίσωση (3) έχει λύση της μορφής (4), της οποίας το γεωμετρικό αντίστοιχο είναι μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών, επιφανειών ή υπερεπιφανειών στο χώρο των n διαστάσεων.

Αλλά και στην περίπτωση που δεν υπάρχει λύση της παραπάνω μορφής η εξίσωση (3) έχει λύσεις και μάλιστα οποιαδήποτε καμπύλη κάθε στοιχειώδες τμήμα της οποίας επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση

(διανυσματικά αρκεί να ισχύει η συνθήκη καθετότητας μεταξύ του διανύσματος

$$d\vec{s}$$

μιας στοιχειώδους μετατόπισης κατά μήκος της καμπύλης και του διανύσματος, που ορίζεται από τις τιμές Y_1, Y_2, ……, Y_n σε κάποιο σημείο της καμπύλης). Για να γίνει περισσότερο κατανοητός ο γεωμετρικός χαρακτήρας αυτής της λύσης, υπενθυμίζουμε ότι μια καμπύλη μπορεί να θεωρηθεί ως η τομή (n–1) υπερεπιφανειών.

Αν περιοριστούμε στον συνήθη γεωμετρικό χώρο των τριών διαστάσεων, μια καμπύλη προκύπτει ως τομή δυο συνήθων επιφανειών. Ας υποθέσουμε ότι η διαφορική εξίσωση είναι η

$$x_1\, dx_1 + x_2\, dx_2 + x_3\, dx_3 = 0 \qquad (10)$$

Αυτή προφανώς έχει λύση που παριστάνει την επιφάνειες σφαιρών. Μια από αυτές που διέρχεται από το σημείο (1, 0, 0) έχει εξίσωση

$$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + x_3^{\,2} = 1 \qquad (11)$$

Πέραν όμως αυτής της αλγεβρικής λύσης, όλες οι καμπύλες που διέρχονται από το σημείο (1, 0, 0) και οι οποίες προκύπτουν ως τομές της συγκεκριμένης σφαίρας (11) και της εξίσωσης

$$f(x_1, x_2, x_3) - f(1, 0, 0) = 0 \qquad (12)$$

(όπου f τυχούσα συνάρτηση των x_1, x_2, x_3), είναι επίσης λύσεις της εξίσωσης (10).

Οι τελευταίες ονομάζονται και μη γνήσιες λύσεις (καταχρηστικές) σε αντιδιαστολή με τη γνήσια αλγεβρική. Οι μη γνήσιες λύσεις, όπως οι παραπάνω καμπύλες που διέρχονται από δεδομένο σημείο, βρίσκονται προφανώς πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας της εξίσωσης (11). Οι λύσεις αυτές ικανοποιούν ταυτόχρονα τις εξισώσεις (11) και (12).

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει γνήσια λύση, όπως π.χ. η εξίσωση

$$x_2\, dx_1 + dx_2 + dx_3 = 0 \qquad (13)$$

μπορούμε να ορίσουμε μία αυθαίρετη συνάρτηση, όπως στην εξ. (12), και ένα σημείο, δια του οποίου διέρχεται επιφάνεια που ορίζεται από τη συνάρτηση αυτή. Με αντικατάσταση της μιας από τις μεταβλητές καθώς και του διαφορικού της στην (13) προκύπτει η εξίσωση της μορφής

$$Y_1\, dx_1 + Y_2\, dx_2 = 0 \qquad (14)$$

που περιέχει δυο μεταβλητές, οπότε δίνει πάντα λύση της μορφής

$$f(x_1, x_2) = C \qquad (15)$$

Οι μη γνήσιες λύσεις της εξ. (13) ικανοποιούν ταυτόχρονα τις εξισώσεις (12) και (15). Επομένως θα είναι όλες καμπύλες που διέρχονται από το συγκεκριμένο σημείο και βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια που διέρχεται από το συγκεκριμένο σημείο, που ορίστηκε βάσει μιας αυθαίρετης συνάρτησης. Τα συμπεράσματα, που προέκυψαν από την διερεύνηση στην περίπτωση τριών μεταβλητών, μπορούν να γενικευθούν και ισχύουν για οποιοδήποτε αριθμό μεταβλητών.

Έστω δύο τυχαία σημεία Α και Β στο χώρο των n διαστάσεων και ζητείται να διερευνηθεί η δυνατότητα προσέγγισης του Β από το Α με μια καμπύλη που αποτελεί λύση – σύμφωνα με τα προαναφερθέντα – της εξίσωσης (3).

Από την διερεύνηση αυτής της εξίσωσης που έγινε, προκύπτει ότι αν η εξίσωση αυτή έχει λύση γνήσια (λύση στη μορφή της εξ. (4)), ή αλλιώς αν η εξίσωση αυτή είναι ολοκληρώσιμη, η σύνδεση αυτή είναι αδύνατη, εκτός αν το σημείο Β βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια που ορίζεται από τη λύση της εξίσωσης (3) και τις συντεταγμένες του σημείου Α.

Επομένως σε κάθε γειτονιά δεδομένου σημείου Α υπάρχουν σημεία, τα οποία δεν

είναι προσιτά από το Α κατά μήκος καμπυλών που διέρχονται από το σημείο Α και βρίσκονται πάνω σε επιφάνεια που διέρχεται από το σημείο αυτό και που προκύπτει από τη λύση διαφορικής εξίσωσης της μορφής (3), (δηλαδή όλα τα σημεία που βρίσκονται έξω από την επιφάνεια αυτή).
Έτσι αποδεικνύεται ότι η ύπαρξη λύσης της εξίσωσης (3) αποτελεί την αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη σημείων στην γειτονιά δεδομένου σημείου, μη προσιτών από το τελευταίο κατά μήκος καμπυλών αποτελουσών λύσεις της εξίσωσης. Τίθεται όμως το ερώτημα εάν συνθήκη αυτή είναι και επαρκής.
Θεώρημα Καραθεοδωρή. Η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα δόθηκε από τον Καραθεοδωρή με το θεώρημα που ακολουθεί:
«**Εάν σε κάθε γειτονιά οποιουδήποτε σημείου Α που επιλέγεται αυθαίρετα, περιέχονται σημεία μη προσιτά από το Α κατά μήκος καμπυλών που είναι λύσεις της εξίσωσης**

$$\mathbf{\Sigma Y_i\, dx_i = 0,}$$

η εξίσωση αυτή είναι ολοκληρώσιμη».

Η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα δόθηκε από τον Καραθεοδωρή με το θεώρημα που ακολουθεί:
«Εάν σε κάθε γειτονιά οποιουδήποτε σημείου Α που επιλέγεται αυθαίρετα, περιέχονται σημεία μη προσιτά από το Α κατά μήκος καμπυλών που είναι λύσεις της εξίσωσης $\Sigma Y_i dx_i = 0$,
η εξίσωση αυτή είναι ολοκληρώσιμη».

Ίσως είναι απαραίτητη μια πληρέστερη ερμηνεία του όρου γειτονιά ενός σημείου. Ο πολυδιάστατος χώρος γίνεται μετρικός, αν σε κάθε ζεύγος σημείων αντιστοιχεί μια απόσταση $\rho(x', x'')$, όπου x παριστάνει το σύνολο των συντεταγμένων $(x^1, \ldots, x^n)$ και επομένως τα x' και x'' παριστάνουν το σύνολο των τιμών των συντεταγμένων στα δυο σημεία. Η απόσταση $\rho(x', x'')$ πρέπει να έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $\rho(x', x'') = 0$ μόνον αν τα δυο σημεία συμπίπτουν.
2. $\rho(x', x'') = \rho(x'', x')$ (συμμετρική ιδιότητα)
3. $\rho(x', x'') + \rho(x'', x''') > \rho(x', x''')$ (τριγωνική ιδιότητα)

Οι ιδιότητες αυτές δεν προσδιορίζουν ειδική συνάρτηση ρ. Πάντως αν η απόσταση οριστεί με την εξίσωση:

$$\rho(x', x'') = \left[\sum_{1}^{n} (x_i'' - x_i')^2 \right]^{1/2} \qquad (16)$$

Ικανοποιούνται οι παραπάνω συνθήκες (ευκλείδειος χώρος).
Με τον παραπάνω ορισμό του μετρικού χώρου, σημεία που βρίσκονται σε απόσταση ίση ή μικρότερη μιας δεδομένης απόστασης ρ από δεδομένο σημείο, θεωρούνται ότι βρίσκονται στη γειτονιά αυτού του σημείου……

Η προηγούμενη ανάλυση των γραμμικών διαφορικών μορφών έγινε εξαιτίας του γεγονότος ότι το απορροφούμενο ποσό θερμότητας dq κατά τη διάρκεια μιας στατικής απειροστής διεργασίας γράφεται ως γραμμική διαφορική μορφή

$$dq = \sum_{1}^{n} Y_i\, dx_i \qquad (17)$$

όπου dx_i οι θερμοδυναμικές συντεταγμένες του συστήματος.

Σε συνθήκες στατικής διεργασίας το έργο που εκτελείται από το σύστημα οφείλεται αποκλειστικά σε εκείνες τις δυνάμεις που είναι χαρακτηριστικές της κατάστασης του συστήματος και υπολογίζεται από την εξίσωση $dw=PdV$ ή γενικότερα $dw=\Sigma X_i\, dx_i$, όπου P η πίεση του αερίου ή γενικότερα X_i η γενικευμένη δύναμη του συστήματος. Στην περίπτωση συστήματος που περιγράφεται από μια παραμορφωτική συντεταγμένη, τον όγκο, ισχύει

$$dq = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right] dV + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT$$

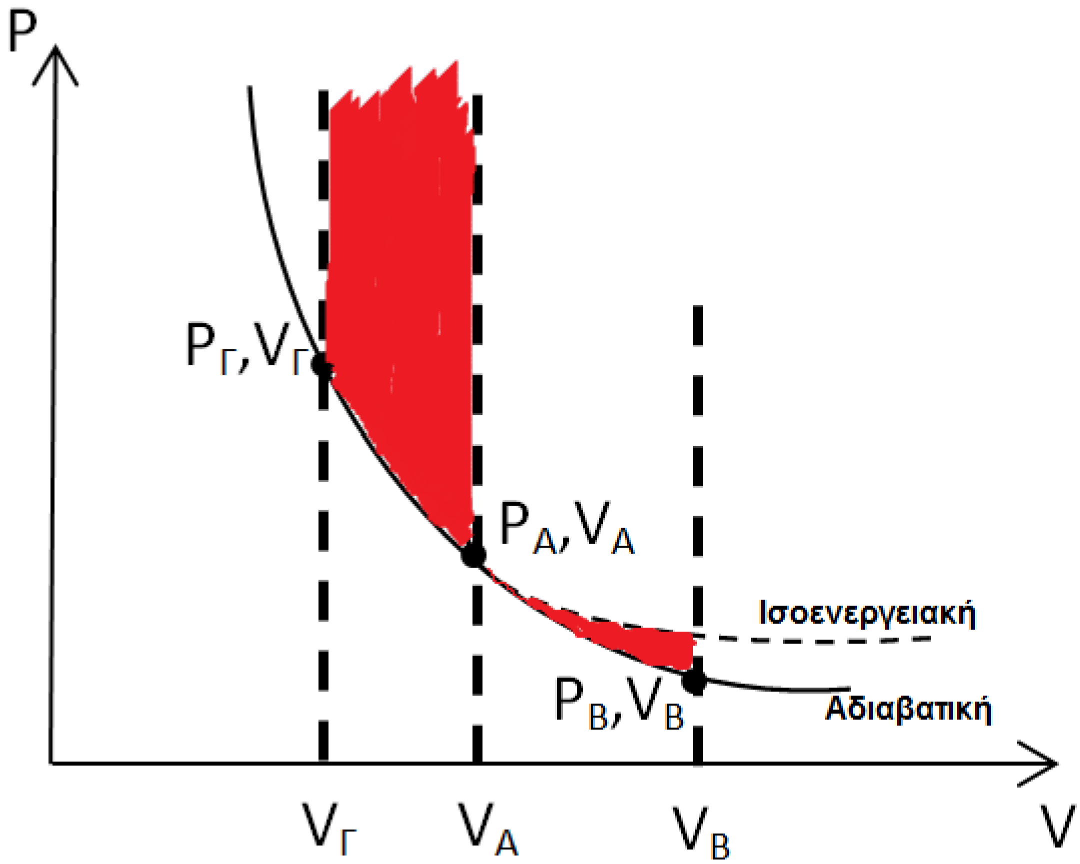
Όπως προκύπτει από τον πρώτο θερμοδυναμικό νόμο, το ποσό θερμότητας q δεν είναι συνάρτηση της κατάστασης και επομένως η έκφραση της δεξιάς πλευράς της εξίσωσης (17) δεν είναι τέλειο διαφορικό.
Επομένως η ολική διαφορική εξίσωση:

$$dq = 0, \quad \sum_1^n Y_i\, dx_i = 0 \qquad (18)$$

η οποία αποτελεί την συνθήκη μιας αδιαβατικής αντιστρεπτής διεργασίας, δεν είναι βέβαιον αν επιδέχεται λύση της μορφής q=q΄, τουλάχιστον στην περίπτωση κατά την οποία οι ανεξάρτητες μεταβλητές στην εξίσωση 17 υπερβαίνουν τις δυο. Επομένως δεν είναι δεδομένη η ύπαρξη αδιαβατικών επιφανειών. Η δυνατότητα ύπαρξης λύσης είναι συνυφασμένη με την ύπαρξη δυο συναρτήσεων της κατάστασης του συστήματος, λ και σ, τέτοιων ώστε να ισχύει εξίσωση της μορφής

$$dq = \lambda\, d\sigma \qquad (19)$$

Η δυνατότητα όμως ύπαρξης λύσης δεν μπορεί να αναζητηθεί σε μαθηματική διερεύνηση. Μόνον στην περίπτωση δυο ανεξάρτητων μεταβλητών προκύπτει από μαθηματικής πλευράς ύπαρξη λύσης. Στην περίπτωση του ιδανικού αερίου προκύπτει η λύση PV^{γ}=σταθ. Στη γενική περίπτωση μόνον στη βάση φυσικού νόμου μπορεί να δειχθεί η ύπαρξη της λύσης και επομένως η ύπαρξη των συναρτήσεων λ και σ. Ο νόμος αυτός θα προκύψει ως γενίκευση από τον περιορισμένο αριθμό πειραματικών δεδομένων. Τα δεδομένα αυτά, όπως προκύπτει από την εξ. (18), πρέπει να αναφέρονται σε αδιαβατικές διεργασίες. Ας παρακολουθήσουμε αδιαβατικές διεργασίες σε απλό σύστημα που περιγράφεται από δυο ανεξάρτητες μεταβλητές, π.χ. τις P και V. Πιο συγκεκριμένα έστω ρευστό του οποίου η αρχική κατάσταση σε συντεταγμένες περιγράφεται από τις τιμές P_A, V_A. Έστω οι ισόχωρες μεταβολές V_B και V_Γ. Ας θεωρήσουμε αδιαβατικές μεταβάσεις από την αρχική κατάσταση (P_A, V_A) σε καταστάσεις που βρίσκονται στην ισόχωρη V_B.



Για κάθε τέτοια μετάβαση θα ισχύει σύμφωνα με τον πρώτο νόμο η εξίσωση:

$$\Delta U = U(P'_B, V_B) - U(P_A, V_A) = -w_\alpha \qquad (20)$$

όπου η P'_B αντιστοιχεί σε πιέσεις που βρίσκονται στην ισόχωρη V_B. Είναι προφανές από την εξίσωση ότι το αδιαβατικό έργο w_α καθορίζει μονοσήμαντα την τιμή της εσωτερικής ενέργειας $U(P'_B, V_B)$, δεδομένου ότι η εσωτερική ενέργεια της αρχικής κατάστασης είναι πλήρως καθορισμένη. Επομένως το έργο το οποίο θα εκτελέσει το σύστημα σε μια αδιαβατική μετάβαση από P_A, V_A, σε καταστάσεις που βρίσκονται στην ισόχωρη V_B, καθορίζει μοναδικά την πίεση P'_B. Η τιμή του έργου σ' αυτές τις μεταβάσεις εξαρτάται από τον τρόπο διεξαγωγής της αδιαβατικής διεργασίας. Εάν η διεργασία διεξαχθεί κατά τρόπον αντιστρεπτόν, το έργο, το οποίο θα εκτελέσει το σύστημα, θα είναι προφανώς το μέγιστο και η τελική κατάσταση του συστήματος θα βρίσκεται στην τομή της αδιαβατικής που διέρχεται από το σημείο P_A, V_A με την ισόχωρη V_B. Έργο ίσο με το μηδέν θα εκτελέσει το σύστημα αν η εκτόνωση πραγματοποιηθεί με εξωτερική πίεση ίση με το μηδέν (στην περίπτωση αερίου αυτό ισοδυναμεί με ελεύθερη εκτόνωση). Επομένως η κατάσταση αυτή θα βρίσκεται στην τομή της ισοενεργειακής καμπύλης με την ισόχωρη V_B. Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι όλες οι ισόχωρες καταστάσεις, που βρίσκονται μεταξύ των δυο ακραίων αυτών καταστάσεων, είναι δυνατόν να επιτευχθούν με αδιαβατική εκτόνωση από την αρχική κατάσταση. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι μπορούμε να ρυθμίσουμε τη διεξαγωγή της διεργασίας κατά τέτοιο τρόπο, ώστε το σύστημα να εκτελέσει οποιαδήποτε τιμή έργου που βρίσκεται μεταξύ της μηδενικής τιμής, κατά την ελεύθερη εκτόνωση, και της μέγιστης τιμής κατά την αντιστρεπτή αδιαβατική διεργασία. Μεταθέτοντας την ισόχωρη και επαναλαμβάνοντας τα ίδια πειράματα συμπεραίνουμε ότι από την κατάσταση Α είναι προσιτές αδιαβατικά όλες οι καταστάσεις που βρίσκονται μεταξύ της αδιαβατικής και της ισοενεργειακής για την περιοχή που βρίσκεται δεξιά της κατάστασης P_A, V_A. Εάν η ισόχωρη, όπως η V_Γ, που βρίσκεται αριστερά της V_A, είναι δυνατόν να προσεγγιστούν με αδιαβατική συμπίεση όλες οι καταστάσεις που βρίσκονται επί και πάνω από την αδιαβατική. Στην περίπτωση αυτή πάνω όριο δεν υφίσταται, δεδομένου ότι το επί του συστήματος εκτελούμενο έργο μπορεί καταρχήν να αυξάνεται απεριόριστα καθώς αυξάνεται η εξωτερική πίεση. Δεδομένου ότι οι εκτονώσεις μπορούν να εναλλάσσονται με συμπιέσεις, προκύπτει ως συμπέρασμα ότι από κάποια κατάσταση μόνον καταστάσεις που βρίσκονται στην αδιαβατική ή πάνω απ' αυτή είναι προσιτές με αδιαβατικές διεργασίες. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε, αν θεωρήσουμε προσφορά έργου στο σύστημα αδιαβατικά και υπό σταθερό όγκο με ανατάραξη ή μέσω ηλεκτρικής αντίστασης. Στην περίπτωση αυτή μόνο προσφορά έργου στο σύστημα είναι δυνατή. Βέβαια τα περιγραφέντα πειράματα αναφέρονται σε απλό σύστημα με δυο ανεξάρτητες μεταβλητές, δηλαδή στην περίπτωση κατά την οποία δεν απαιτείται προσφυγή σε φυσικό νόμο για την αναζήτηση λύσης της εξίσωσης 14. Εντούτοις αποτελούν αφετηρία για μια γενίκευση, η οποία εκ των υστέρων μπορεί να λάβει ισχύ νόμου.

Η γενίκευση αυτή έγινε από τον Καραθεοδωρή και αποτελεί μια νέα διατύπωση του δεύτερου νόμου της θερμοδυναμικής. Η ονομαζόμενη **αρχή Καραθεοδωρή** έχει ως εξής:

Σε κάθε γειτονιά μιας δεδομένης κατάστασης ενός συστήματος υπάρχουν καταστάσεις μη προσιτές από αυτή με αντιστρεπτή ή μη αντιστρεπτή αδιαβατική διεργασία.

Η πρόταση αυτή αποτελεί το φυσικό περιεχόμενο του δεύτερου νόμου της θερμοδυναμικής στην κατά Καραθεοδωρή αξιωματική ανάπτυξη του νόμου αυτού….

Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ

Η ΣΥΜΒΟΛΗ ΤΟΥ ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ ΣΤΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΟΠΤΙΚΗ

Το ανήσυχο πνεύμα του μεγάλου αυτού επιστήμονα δεν περιορίστη-κε μόνο στην έρευνα για την επιστήμη των μαθηματικών. Αξιοσημείωτο είναι και το έργο του στη Φυσική.

Ο λογισμός των μεταβολών ήταν το κύριο πεδίο της μαθηματικής έρευνας του Καραθεοδωρή. Στη Φυσική συνδέεται με αυτό που λέμε

« πρόβλημα βελτιστοποίησης », γιατί δηλαδή οι φυσικές διαδικασίες

φαίνεται να συμβαίνουν με τέτοιον τρόπο, ούτως ώστε ορισμένες πο-

σότητες να παίρνουν μια « βέλτιστη » τιμή (ελάχιστη ή μέγιστη).

Η Γεωμετρική Οπτική αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα, μια και η ευθύγραμμη διάδοση μιας φωτεινής ακτίνας και οι νόμοι της ανάκλασης και της διάθλασης βασίζονται στην αρχή των Ηρωνος - Fermat,.

Ο Καραθεοδωρής έχοντας ως βάση το έργο του στο λογισμό των μεταβολών, συνοψίζει τους νόμους της ευθύγραμμης διάδοσης του φωτός , τους νόμους της ανάκλασης και τους νόμους της διάθλασης στο νόμο του Ήρωνα–Fermat ,την αρχή δηλαδή του ελάχιστου χρόνου

στη διάδοση του φωτός μεταξύ δύο σημείων.

Περαιτέρω, στον ίδιο κλάδο, δηλ. στη Γεωμετρική Οπτική, από το 1926 έως και το 1943, δημοσιεύει εργασίες σχετικές με τη θεωρία των οπτικών οργάνων , τα σφάλματά τους , παρατηρήσεις σχετικά με τις απεικονίσεις της γεωμετρικής οπτικής (1937) , με τη διερεύνηση του παραβολικού κατοπτρικού τηλεσκοπίου και του τηλεσκοπίου ευρέως πεδίου του Schmidt (1940) καθώς επίσης και σχετικά με τα σφάλματα ανώτερης τάξης κατά την απεικόνιση (1943). Ενδιάμεσα εκδίδεται ένα αρκετά πυκνό και δύσκολο βιβλίο του για τη ***Γεωμετρική Οπτική***.

Γενικά οι μελέτες του στη Γεωμετρική Οπτική οδήγησαν σε εφαρμο-γές , τόσο αξιόλογες, ώστε ένα σύστημα τηλεσκοπίων, στο γνωστό αστε-

ροσκοπείο του όρους Πάλομαρ, έχει βασιστεί σε θεωρίες διατυπωμένες

από τον Καραθεοδωρή.

ΘΕΩΡΗΜΑ Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ

Αν Ο τυχαίο σημείο εσωτερικού τριγώνου ΑΒΓ τότε ισχύει: $\vec{OA} \cdot E_{B O \Gamma} + \vec{OB} \cdot E_{A O \Gamma} + \vec{O\Gamma} \cdot E_{A O B} = \vec{0}$

Αποδείξεις

$\vec{AB}$, $\vec{A\Gamma}$ δεν είναι συγγραμμικά, το διάνυσμα $\vec{AO}$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{AB}$, $\vec{A\Gamma}$, δηλαδή: $\vec{AO} = \lambda \cdot \vec{AB} + \kappa \cdot \vec{A\Gamma} = \vec{AB'} + \vec{A\Gamma'}$ (1),

όπου τα Β΄, Γ΄ βρίσκονται μεταξύ Α, Β και Α, Γ αντίστοιχα, άρα: 0<λ<1, 0<κ<1. Είναι, επίσης $\vec{A\Delta} = \mu \cdot \vec{AO} \overset{(1)}{=} \mu\lambda \cdot \vec{AB} + \mu\kappa \vec{A\Gamma}$ και επειδή τα Δ, Β, Γ είναι συνευθειακά : $\mu\lambda + \mu\kappa = 1 \Rightarrow \mu = \dfrac{1}{\lambda + \kappa}$.

Άρα, $\vec{A\Delta} = \dfrac{1}{\lambda + \kappa} \vec{AO}$ (2) με 0<λ+κ<1 Είναι τώρα,

$$\frac{E_\Gamma}{(AB\Delta)} = \frac{E_B}{(A\Gamma\Delta)} = \frac{\left|\vec{AO}\right|}{\left|\vec{A\Delta}\right|} \overset{(2)}{=} \lambda + \kappa \Rightarrow$$

$$\frac{E_\Gamma + E_B}{(AB\Delta)+(A\Gamma\Delta)} = \lambda + \kappa \Rightarrow \frac{E_B + E_\Gamma}{(AB\Gamma)} = \lambda + \kappa \quad (3)$$

Όμως, $\frac{E_\Gamma}{(OAB')} = \frac{\left|\vec{AB}\right|}{\left|\vec{AB'}\right|} = \frac{1}{\lambda}$ και $\frac{E_\Gamma}{(OA\Gamma')} = \frac{\left|\vec{A\Gamma}\right|}{\left|\vec{A\Gamma'}\right|} = \frac{1}{\kappa}$

και επειδή, (ΟΑΒ΄) = (ΟΑΓ΄), λόγω του παραλληλογράμμου ΑΒΌΓ΄, προκύπτει :

$$\frac{E_B}{E_\Gamma} = \frac{\lambda}{\kappa} \Rightarrow \frac{E_\Gamma + E_B}{E_\Gamma} = \frac{\kappa+\lambda}{\kappa} \overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{(\lambda+\kappa)(AB\Gamma)}{E_\Gamma} = \frac{\kappa+\lambda}{\kappa} \Rightarrow$$
$$E_\Gamma = \kappa(AB\Gamma),$$

οπότε $E_B=\lambda(AB\Gamma)$.

Επομένως, η σχέση (1) γράφεται: $\vec{AO} = \frac{E_B}{(AB\Gamma)} \cdot \vec{AB} + \frac{E_\Gamma}{(AB\Gamma)} \cdot \vec{A\Gamma}$ (4).

Επομένως, το 1^o μέλος της σχέσης που θέλουμε να αποδείξουμε γράφεται:

$$E_A \cdot \vec{OA} + E_B \vec{OB} + E_\Gamma \cdot \vec{O\Gamma} = -E_A \cdot \vec{AO} + E_B \cdot \left(\vec{AB} - \vec{AO}\right) + E_\Gamma \cdot \left(\vec{A\Gamma} - \vec{AO}\right)$$

$$= E_B \cdot \vec{AB} + E_\Gamma \cdot \vec{A\Gamma} - \left(E_A + E_B + E_\Gamma\right) \cdot \vec{AO} =$$

$$= E_B \cdot \vec{AB} + E_\Gamma \cdot \vec{A\Gamma} - (AB\Gamma) \cdot \vec{AO} \overset{(4)}{=} \vec{0}$$

ΜΗΧΑΝΙΚΗ

ΟΙ ΣΠΟΥΔΕΣ ΤΟΥ Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Από το 1891 έως το 1895, σπούδασε πολιτικός μηχανικός στη Στρατιωτική Σχολή του Βελγίου στις Βρυξέλλες. Με την αποφοίτησή του, το 1895, αποδέχτηκε την πρόσκληση του θείου του, Αλέξανδρου Στεφάνου Καραθεοδωρή, ο οποίος ήταν γενικός διοικητής της Κρήτης, και τον επισκέφθηκε στα Χανιά. Εκεί γνωρίστηκε με τον Ελευθέριο Βενιζέλο. Στην συνέχεια πήγε στην Λέσβο, όπου μετείχε στην κατασκευή έργων οδοποιίας, ενώ το 1898 πήγε στην Αίγυπτο, για να εργαστεί ως μηχανικός στην βρετανική εταιρεία που κατασκεύαζε το φράγμα στο Ασουάν. Στην Αίγυπτο συνέχισε να μελετά μαθηματικά_συγγράμματα, ενώ έκανε και μετρήσεις στην κεντρική είσοδο της πυραμίδας του Χέοπα, τις οποίες και δημοσίευσε.

Στην Αίγυπτο, ο Καραθεοδωρή κατάλαβε πόσο μεγάλη γοητεία και επιρροή ασκούσαν επάνω του τα Μαθηματικά και συνειδητοποίησε πως η δουλειά του μηχανικού δεν ήταν εκείνη που αναζητούσε το ανήσυχο πνεύμα του. Έτσι το 1900, ο 27χρονος πια Καραθεοδωρή, προς μεγάλη έκπληξη των δικών του, αποφάσισε να εγκαταλείψει το επάγγελμα του μηχανικού και να πάει στην Γερμανία για να σπουδάσει Μαθηματικά. Για δύο χρόνια παρακολούθησε μαθήματα Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο του Βερολίνου.

ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ ΚΑΙ ΑΙΝΣΤΑΙΝ

Η γνωριμία του με τον Αϊνστάιν έγινε το 1915 στο πανεπιστήμιο του Γκέντιγκεν και ένα χρόνο μετά ξεκίνησε η συνεργασία τους.
Ήταν μια μέρα σαν κι αυτήν, στις 6 Σεπτεμβρίου 1916, **όταν ο Αϊνστάιν γράφει στον Καραθεοδωρή την πρώτη από μια σειρά επιστολών, εγκαινιάζοντας έτσι την αλληλογραφία που αργότερα θα γίνει ένας από τους σύγχρονους αστικούς μύθους, τμήμα της οποίας βρίσκεται σήμερα στο Ισραήλ. Στην πρώτη αυτή επιστολή, που ζητά τη γνώμη του Καραθεοδωρή σε συγκεκριμένα προβλήματα, ο Έλληνας μαθηματικός απαντά τον Δεκέμβριο του ιδίου έτους και ο Αϊνστάιν συνεχίζει να ζητάει την βοήθειά του. Σε άλλη επιστολή γράφει: «*Αγαπητέ συνάδελφε, βρίσκω θαυμάσιο τον υπολογισμό που κάνατε. Τώρα τα καταλαβαίνω όλα [...]. Αν θέλετε να μπείτε στον κόπο να μου εξηγήσετε και τους κανονικούς μετασχηματισμούς, θα έχετε έναν ευγνώμονα και ευσυνείδητο ακροατή. Αν μάλιστα λύσετε και το πρόβλημα των κλειστών τροχιών του χρόνου, θα υποκλιθώ ενώπιόν σας.*»**

Με τον Einstein διατήρησαν αδιατάρακτη και βαθιά αλληλεκτίμηση ως το τέλος.

Ένα αποσπασμα από την τελευταια συνεντευξη του einstein (1955)

Κύριοι ζητήσατε να σας απαντήσω σε χίλια δύο πράγματα, κανείς όμως δεν θέλησε να ρωτήσει ποιος ο δάσκαλός μου, ποιος μου έδειξε και μου άνοιξε τον δρόμο προς την ανώτερη μαθηματική επιστήμη και έρευνα. Και για να μην σας κουράσω, σας λέω απλά, χωρίς λεπτομέρειες, ότι μεγάλος μου δάσκαλος υπήρξε ο αξεπέραστος Έλληνας Κωνσταντίνος Καραθεοδωρής, στον οποίο, εγώ προσωπικά αλλά και η μαθηματική επιστήμη, η φυσική, η σοφία του αιώνα μας χρωστάμε τα πάντα

ΤΙ ΕΙΠΑΝ ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ

Αν θέλετε να μπείτε στον κόπο να μου εξηγήσετε ακόμα και τους κανονικούς μετασχηματισμούς, θα βρείτε έναν ευγνώμονα και ευσυνείδητο ακροατή. Αν όμως λύσετε και το πρόβλημα των κλειστών γραμμών του χρόνου, θα σταθώ μπροστά σας με σταυρωμένα χέρια. Πίσω από αυτό υπάρχει κρυμμένο κάτι που είναι αντάξιο του ιδρώτα των καλυτέρων.

A. Einstein, 1916

Er ist ein feiner Mensch. (Είναι ένας υπέροχος άνθρωπος)

A. Einstein

Συνάδελφε, με καταπλήξατε. Συγχαρητήρια επιστολή του Einstein στον Καραθεοδωρή για την εργασία του με τίτλο “Axiomatik der speziellen Relativitätstheorie”

(Αξιώματα της ειδικής θεωρίαςτης σχετικότητας)

Κύριοι, ζητήσατε να σας απαντήσω σε χίλια δύο πράγματα, κανείς όμως δεν θέλησε να ρωτήσει ποιος ο δάσκαλός μου, ποιος μου έδειξε και μου άνοιξε τον δρόμο προς την ανώτερη μαθηματική επιστήμη και έρευνα. Και για να μην σας κουράσω ,σας λέω απλά, χωρίς λεπτομέρειες, ότι μεγάλος μου δάσκαλος υπήρξε ο αξεπέραστος Έλληνας Κωνσταντίνος Καραθεοδωρή, στον οποίο, εγώ προ-

σωπικά αλλά και η μαθηματική επιστήμη, η φυσική, η σοφία του αιώνα μας χρωστάμε τα πάντα.

A. Einstein στην τελευταία συνέντευξη τύπου το 1955.

Ένας από τους λαμπρότερους μαθηματικούς, έχει ουσιαστικά εμπλουτίσει και επηρεάσει αποφασιστικά την επιστήμη. Ένας άνδρας με ασυνήθιστη και πλατιά παιδεία, ως ανήκων στο Ελληνικό έθνος με το υψιπετές πνεύμα του και την ουσιαστική αναζήτηση της γνώσης, συνέχισε την

παράδοση και την κληρονομιά της κλασικής Ελλάδος.

Ακαδημαϊκός Oscar Perron

Εσείς, κύριε Καραθεοδωρή, μας επιστήσατε την προσοχή στο διπλό ρόλο που ενυπάρχει στη Θεωρία Μεταβολών, η οποία κατευθύνει την προσοχή μας από το δύσκολο ξεκαθάρισματων μεμονωμένων περιπτώσεων στην εύκολα εποπτευμένη ολότητα. Όπου μια πληθώρα μεμονωμένων προτάσεων συμπεριλαμβάνονται σε μια απλή πρόταση και το πιο αξιοσημείωτο είναι ότι όχι μόνο ο άνθρωπος προτιμά αυτό τον ιδιαίτερο τρόπο θεώρησης, αλλά και η φύση. Εύχομαι ορισμένοι από τους καρπούς της επιστημονικής σας δουλειάς να κοσμούν τα ακαδημαϊκά πεπραγμένα μας.

Max Plank, κατά την αναγόρευση του

Καραθεοδωρή σαν μέλος της Πρωσι-

κής Ακαδημίας

Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Η **θεωρία της σχετικότητας** αναπτύχθηκε από τον Άλμπερτ Αϊνστάιν στις αρχές της δεκαετίας του 1900. Υπάρχουν δύο θεωρίες της σχετικότητας. Η πρώτη είναι η **ειδική σχετικότητα** και η δεύτερη είναι η **γενική σχετικότητα** και οι δύο είναι με βάση την αρχή της σχετικότητας , η οποία δημιουργήθηκε από τον Γαλιλαίο Γαλιλέι στο 1600.

1. Ειδική σχετικότητα

Η **ειδική σχετικότητα** είναι η θεωρία που διατυπώθηκε απο τον Άλμπερτ Αϊνστάιν το 1905, και η οποία συμπληρώνει τους νόμους κίνησης του Νεύτωνα, ώστε να ισχύουν και σε ταχύτητες κοντά στην ταχύτητα του φωτός. Η ειδική θεωρία της σχετικότητας προκύπτει απο την ικανοποίηση της γενικευμένης αρχής της σχετικότητας και της αρχής του Αϊνστάιν, σύμφωνα με την οποία η ταχύτητα του φωτός είναι ίδια για όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές, ανεξάρτητα απο τη σχετική τους ταχύτητα. Σύμφωνα με την γενικευμένη αρχή της σχετικότητας, οι φυσικοί νόμοι που ισχύουν σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς (δηλαδή ένα μη επιταχυνόμενο σύστημα), έχουν την ίδια μορφή σε οποιοδήποτε άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Πριν τον Αϊνστάιν, μια πρώτη μορφή της αρχής της σχετικότητας είχε διατυπωθεί ήδη από τον Γαλιλαίο και στη συνέχεια ενσωματώθηκε στη Νευτώνεια σύνθεση. Η αρχή αυτή δήλωνε ότι όλοι οι νόμοι της *μηχανικής* πρέπει να έχουν την ίδια μορφή σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Η μετάβαση από το ένα αδρανειακό σύστημα στο άλλο γινόταν με ένα ορισμένο είδος μετασχηματισμών συντεταγμένων, που ονομάστηκαν αργότερα μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου ή αλλιώς, *νόμος πρόσθεσης ταχυτήτων*. Ενώ οι νόμοι της μηχανικής συμμορφώνονταν με τον μετασχηματισμό αυτό (ήταν αναλλοίωτοι κατά την εφαρμογή του), οι νόμοι του ηλεκτρομαγνητισμού, και ειδικά ο νόμος για την σταθερότητα και παγκοσμιότητα της ταχύτητας του φωτός, τον παραβίαζαν. Ο Αϊνστάιν αντικατέστησε τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου με ένα νέο σύνολο μετασχηματισμών, τους μετασχηματισμούς του Λόρεντζ, και διατύπωσε την γενικευμένη αρχή της Σχετικότητας, σύμφωνα με την οποία *όλοι οι νόμοι της Φύσης* (μηχανικής, ηλεκτρομαγνητισμού και όποιοι άλλοι) είναι αναλλοίωτοι κάτω από τους νέους αυτούς μετασχηματισμούς και (πρέπει να) παίρνουν την ίδια μορφή σε όλα τα αδρανειακά συστήματα.

Η ειδική θεωρία της σχετικότητας προβλέπει φαινόμενα που αντίκεινται στην καθημερινή μας εμπειρία, ωστόσο έχει επιβεβαιωθεί πειραματικά σε σειρά πειραμάτων, και επιβεβαιώνεται καθημερινά στους σύγχρονους επιταχυντές σωματιδίων.Η ειδική σχετικότητα συμπληρώθηκε αργότερα από τη γενική σχετικότητα, διατυπωμένη επίσης από τον Αϊνστάιν.

2. Γενική σχετικότητα

Η γενική σχετικότητα ή **γενική θεωρία της σχετικότητας** είναι η γεωμετρική θεωρία της βαρύτητας που δημοσιεύθηκε από τον Άλμπερτ Αινσταιν το 1916. Πρόκειται για την τρέχουσα περιγραφή της βαρύτητας στη σύγχρονη φυσική . Η γενική σχετικότητα γενικεύει την ειδική σχετικότητα και το νόμο του Νεύτωνα της παγκόσμιας έλξης , παρέχοντας μια ενιαία περιγραφή της βαρύτητας ως μια γεωμετρική ιδιότητα του χώρου και του χρόνου , ή χωροχρόνου . Ειδικότερα, η καμπυλότητα του χωροχρόνου είναι άμεσα συνδεδεμένη με την τετρα-ορμή (μάζα-ενέργεια και γραμμική ορμή), ανεξάρτητα από την ύλη και την ακτινοβολία που είναι παρόντες.

Συμπερασματικά:

1. Οι βασικές παραδοχές θεμελίωσης της θεωρίας του είναι ότι οι νόμοι της φυσικής είναι ίδιοι δηλαδή έχουν την ίδια μαθηματική μορφή για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς και επίσης η ταύτητα του φωτός είναι ίδια για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς και είναι ανεξάρτητη από την κίνηση της φωτεινής πηγής.
2. Βλέπουμε βασικές έννοιες όπως ο χρόνος, ο χώρος, η ύλη και η ενέργεια με διαφορετικό τρόπο.

Ο ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ ΔΙΝΕΙ ΙΣΧΥ ΣΤΗΝ ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Η πραγματικά μεγάλη πάντως αρχή της φυσικής στο πλαίσιο του λογισμού των μεταβολών και της βελτιστοποίησης, και η οποία έπαιξε καθοριστικό ρόλο ως σήμερα στην ανάπτυξη των φυσικών θεωριών, είναι η αρχή της «ελάχιστης δράσης». Η ουσία της έγκειται στο ότι οποιοδήποτε μηχανικό σύστημα, μεταβαίνοντας από μία κατάσταση σε μια χρονική στιγμή σε μια άλλη κατάσταση σε μια άλλη χρονική στιγμή, θα ελαχιστοποιήσει τη «δράση» του, μια ορισμένη ποσότητα που σχηματίζεται από τις παραμέτρους του συστήματος. Οι προκύπτουσες εξισώσεις κίνησης παίρνουν κάθε φορά μια μορφή που εξαρτάται από την υπό εξέταση θεωρία. Ο Καραθεοδωρή ήταν βαθύς γνώστης του λογισμού των μεταβολών και των σχετικών μαθηματικών προβλημάτων. Πάνω σε τέτοια τεχνικά θέματα αναφορικά με τη γενική θεωρία της σχετικότητας ήταν και το περιεχόμενο των επιστολών που αντάλλαξε με τον Einstein γύρω στο 1916.

Λοιπόν, λίγα πράγματα γύρω από τη γενική θεωρία της σχετικότητας έχουν καταγραφεί στην ιστορία και έχουν έμμεση σχέση με τον Καραθεοδωρή. Ο Einstein ξεκίνησε το 1907 τον μακρύ δρόμο, ο οποίος οκτώ χρόνια αργότερα κατέληξε στη γενική σχετικότητα, όταν συνέλαβε αυτό που ο ίδιος χαρακτήρισε την «ευτυχέστερη σκέψη» της ζωής του: τη μη διακρισιμότητα των φαινομένων επιτάχυνσης από τα φαινόμενα ενός πεδίου βαρύτητας («αρχή της ισοδυναμίας»). Η πορεία ήταν επίπονη και αγωνιώδης ως την τελική διατύπωση των εξισώσεων του πεδίου της γενικής σχετικότητας που φέρουν το όνομά του. Αν και κανένα σοβαρό επιχείρημα δεν διατυπώθηκε ποτέ που να αμφισβητεί την ανεξαρτησία του Einstein στην παραγωγή των εξισώσεών του, είναι γνωστή μια παράλληλη έρευνα του Hilbert το κρίσιμο ιδιαίτερα τελικό διάστημα ανάμεσα στο καλοκαίρι και στο φθινόπωρο του 1915.

Αναφέραμε ήδη ότι οι βασικές εξισώσεις μιας φυσικής θεωρίας προκύπτουν από την αρχή της ελάχιστης δράσης ως αποτέλεσμα του λογισμού των μεταβολών. Η αλήθεια είναι ότι ο Hilbert, βαθύς γνώστης και αυτός του λογισμού των μεταβολών αλλά και των μαθηματικών λεπτοτήτων των γενικευμένων καμπύλων χώρων στους οποίους οδηγούσαν οι έρευνες της γενικής σχετικότητας, αντιλήφθηκε αμέσως τη σημασία της ανολοκλήρωτης ακόμη το 1914 θεωρίας του Einstein για τη βαρύτητα και ξεκίνησε και αυτός την προσπάθεια παραγωγής εξισώσεων του πεδίου από μια αρχή ελάχιστης δράσης. Το πρόγραμμά τους βέβαια δεν ήταν με κανέναν τρόπο ταυτόσημο. Οπως και με την ειδική θεωρία της σχετικότητας, πίσω από το πρόγραμμα του Einstein ήταν η αρχή της ισοδυναμίας και, αναπόδραστα, η αρχή συμμετρίας για το αναλλοίωτο των νόμων της φύσης σε όλα τα συστήματα αναφοράς («γενικό συναλλοίωτο»).

Ο Hilbert προσπάθησε να φέρει τον Einstein στο Gottingen για να μάθει από πρώτο χέρι για τη θεωρία του. Το πέτυχε το καλοκαίρι του 1915, όταν ο Einstein την πρώτη εβδομάδα του Ιουλίου έδωσε μια σειρά έξι διαλέξεων πάνω στη γενική θεωρία της σχετικότητας. Ανάμεσα στα μέσα Ιουλίου και στα τέλη Νοεμβρίου του ίδιου έτους υπήρξε μια ανταλλαγή επιστολών μεταξύ των δύο ανδρών και, σε κάποιες στιγμές, μια σχετική ένταση. Ο σκοπός ήταν να διατυπωθούν εξισώσεις του πεδίου γενικά συναλλοίωτες, που να προκύπτουν από μια αρχή ελάχιστης δράσης. Η κατάληξη ήταν ότι ο Hilbert παρουσίασε την τελική εργασία του στις 20 Νοεμβρίου 1915 στην Ακαδημία Επιστημών του Gottingen πέντε ημέρες προτού ο Einstein παρουσιάσει τη δική του τελική μορφή των εξισώσεων του πεδίου στις 25 Νοεμβρίου 1915 στην Πρωσική Ακαδημία Επιστημών του Βερολίνου.

Οι εξισώσεις πεδίου του Hilbert ήταν βασικά όμοιες με εκείνες του Einstein. Από αυτό μερικοί σχολιαστές είχαν πρόχειρα υποθέσει ότι ο Einstein είχε επωφεληθεί από την εργασία του Hilbert για να δώσει την τελική μορφή στις δικές του εξισώσεις πεδίου της γενικής σχετικότητας. Η υπόθεση αυτή μπορεί πλέον οριστικά να αντικρουστεί. Οπως κατέθεσαν τρεις ιστορικοί της επιστήμης σε άρθρο τους στο περιοδικό «Science» το 1997, η πρώτη μορφή των τυπογραφικών διορθώσεων της εργασίας του Hilbert, που φέρει σφραγίδα 6 Δεκεμβρίου 1915, δείχνει ουσιαστικές διαφορές του αρχικού με το δημοσιευμένο κείμενο της εργασίας. Άλλωστε αμέσως μετά την εποχή εκείνη η προτεραιότητα και η ανεξαρτησία της ανακάλυψης του Einstein δεν υπήρξε ποτέ σημείο αμφισβήτησης μεταξύ τους. Ο Hilbert απέδωσε την εννοιολογική πατρότητα της θεωρίας στον Einstein, ο δε Einstein παραδέχθηκε τη συνεισφορά του Hilbert στην αποσαφήνιση της παραγωγής των εξισώσεων του πεδίου από μια αρχή μεταβολών. Από τότε ως σήμερα στη βιβλιογραφία η μεν δράση της γενικής σχετικότητας φέρει το όνομα των Einstein - Hilbert, οι δε εξισώσεις του πεδίου και η όλη θεωρία δίκαια το όνομα του Einstein.

Ο Καραθεοδωρη, όμως εκείνη την εποχή δίδασκε στο Πανεπιστήμιο Gottingen και λαμβάνοντας υπόψη την επίσκεψη του Einstein έπειτα από το κάλεσμα του Hilbert στάθηκε η αφορμή του ενδιαφέροντος του Καραθεοδωρη για τη θεωρία της σχετικότητας και για τη μοναδική εργασία του μετέπειτα (1924) πάνω στην ειδική θεωρία της σχετικότητας. Με τον Einstein διατήρησαν αδιατάρακτη και βαθιά αλληλεκτίμηση ως το τέλος.

Η ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΟΥ ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ ΣΤΗΝ ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Η εργασία του Καραθεοδωρή στην ειδική θεωρία της σχετικότητας δημοσιεύτηκε το 1924 στα πρακτικά της Πρωσικής Ακαδημίας Επιστημών με τίτλο «Σχετικά με την αξιωματική της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας». Όπως προδίδει και ο τίτλος της, η εργασία αυτή ακολουθεί ακριβώς το πρόγραμμα της «αξιωματικής μεθόδου» με το χαρακτηριστικό στυλ του Καραθεοδωρή. Βασίζει λοιπόν τη διαπραγμάτευσή του σε ορισμένα αξιώματα, απλές λογικοφανείς προτάσεις με εμπειρικό υπόβαθρο. Έτσι ξεκινά με προτάσεις όπως:

«Στο ίδιο σημείο του κόσμου δύο γεγονότα α και β είναι ή σύγχρονα ή το α προηγείται του β ή το β τού α και διάφορα γεγονότα αποτελούν σειρά». Ακόμη: «Αν είναι P και Q δύο υλικά σημεία, σε κάθε φωτεινό σήμα α, που ξεκινά από το P, αντιστοιχεί ένα φωτεινό σήμα β, που φθάνει στο Q. Αν ένα άλλο φωτεινό σήμα ξεκινήσει αργότερα του α από το P, θα φθάσει επίσης αργότερα του β στο Q».

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το αρνητικό αποτέλεσμα του γνωστού πειράματος Michelson - Morley (1887) η ταχύτητα του φωτός δεν εξαρτάται από την κίνηση του παρατηρητή , ο Καραθεοδωρής κατέληγε σε μια εξίσωση που λίγες μόνο ειδικές περιπτώσεις συναρτήσεων μετασχηματισμού επαλήθευαν. Μια από αυτές ήταν και οι γνωστοί μετασχηματισμοί Lorentz της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας.

Ο Einstein, ο οποίος στην αρχή αμφέβαλλε αν ένα τέτοιο πρόγραμμα μπορεί να οδηγήσει στους μετασχηματισμούς της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας, δήλωσε τελικά εντυπωσιασμένος από την κατάληξη του Καραθεοδωρή.

ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Τέλος, παρακολουθώντας κανείς τη ζωή και το έργο του Καραθεοδωρή θα διαπιστώσει για άλλη μία φορά αυτό που συνήθως λέγεται: αν η μισή οφειλή στην πορεία που ακολουθούμε έχει να κάνει με την κλίση μας (σήμερα θα λέγαμε με τα γονίδια μας), η άλλη μισή έχει να κάνει με το περιβάλλον μας και τις επιρροές του. Έτσι δεν είναι ίσως τυχαίο που ο Καραθεοδωρή, όταν μετέβη το 1900 στο Βερολίνο για να σπουδάσει μαθηματικά, εκτός από τους μαθηματικούς καθηγητές του Frobenius, Schwarz και Schmidt, παρακολούθησε μαθήματα φυσικής από τον μεγάλο φυσικό Max Planck. Το έργο του στη θερμοδυναμική δεν πρέπει να είναι άσχετο με αυτή την επαφή. Ο ίδιος ο Planck τον υποδέχθηκε με έναν εμπνευσμένο λόγο το 1919, όταν ο Καραθεοδωρής έγινε μέλος της Πρωσικής Ακαδημίας Επιστημών.

Στη συνέχεια μετέβη το 1902 στο Gottingen, το μεγαλύτερο ερευνητικό κέντρο την εποχή εκείνη στα μαθηματικά. Εκεί είχε καθηγητές τους κορυφαίους μαθηματικούς David Hilbert και Felix Klein, αλλά και τον Hermann Minkowski, ο οποίος υπήρξε καθηγητής των μαθηματικών και του Albert Einstein, όταν ο τελευταίος ήταν σπουδαστής στη Ζυρίχη, και στον οποίον οφείλεται η γεωμετρία του τετραδιάστατου χωροχρόνου της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας (Einstein, 1905), όπως την παρουσίασε το 1908, έναν χρόνο πριν από τον θάνατό του. Οι εργασίες τόσο της διδακτορικής διατριβής του το 1904 όσο και της υφηγεσίας του το 1905 αφορούσαν τον λογισμό των μεταβολών, ένα από τα αγαπημένα του θέματα σε όλη τη διάρκεια της επιστημονικής καριέρας του. Το έργο του αργότερα στη γεωμετρική οπτική ήταν εφαρμογή του λογισμού των μεταβολών.

Στο Gottingen παρέμεινε ως το 1908 και επανήλθε ως καθηγητής το 1913, για να διαδεχθεί τον Klein και να παραμείνει εκεί ως το 1918. Από την περίοδο αυτή χρονολογείται η γνωριμία του με τον Einstein, ο οποίος επισκέπτεται έπειτα από πρόσκληση του Hilbert το Gottingen το 1915 για σειρά διαλέξεων πάνω στην κυοφορούμενη την εποχή εκείνη θεωρία του για τη βαρύτητα, τη γενική θεωρία της σχετικότητας. Τα χρόνια στο Gottingen πριν και μετά στάθηκαν η αφορμή του ενδιαφέροντος του Καραθεοδωρή για τη θεωρία της σχετικότητας και για τη μοναδική εργασία του μετέπειτα (1924) πάνω στην ειδική θεωρία της σχετικότητας. Με τον Einstein διατήρησαν αδιατάρακτη και βαθιά αλληλεκτίμηση ως το τέλος.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Κ. ΒΑΓΙΑΝΑΚΗΣ, Η ΣΥΜΒΙΩΣΗ ΦΥΣΙΚΗΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΑΡΘΡΟ ΑΠΟ ΤΟ ΒΗΜΑ, ΔΙΑΘΕΣΙΜΟ ΣΤΟ http://grmath4.phpnet.us/istoria/arthra/simb_math_fisikis_m.httm (ΑΝΑΚΤΗΘΗΚΕ 13-12-2011)

- ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ, ΔΙΑΘΕΣΙΜΟ ΣΤΟ http://el.wikipedia.org/wiki/Γενικη_Θεωρια_της_Σετικοτητας (ΑΝΑΚΤΗΘΗΚΕ 14-01- 2012)

- ΤΟ ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ ΤΟΥ Α.Π.Θ, “ Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ”, ΣΤΟ ΦΑΙΝΟΜΕΝΟΝ, ΤΕΥΧΟΣ 3, ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2008, ΣΕΛΙΔΕΣ 7-10

- ΕΛΕΥΘΕΡΟΤΥΠΙΑ, “ Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ: Ο ΕΛΛΗΝΑΣ ΑΙΝΣΤΑΙΝ”, ΤΕΥΧΟΣ 211, 13 ΝΟΕΜΒΡΙΟΥ 2003

- Κ. ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ, ΔΙΑΘΕΣΙΜΟ ΣΤΟ http://wikipedia.org/wiki/Κωνσταντινος_Καραθεοδωρη (ΑΝΑΚΤΗΘΗΚΕ 14- 01-2012)

- ΣΥΝΔΕΣΜΟΣ ΦΙΛΩΝ ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ, ΔΙΑΘΕΣΙΜΟ ΣΤΟ http://www.karatheodori.gr/index.php?op.* (ΑΝΑΚΤΗΘΗΚΕ 14- 01- 2012)
- ΦΥΣΙΚΟΙ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΗ ΑΠΟ ΤΟ ΔΙΑΔΙΚΤΥΟ, “ΑΡΧΗ ΚΑΡΑΘΕΟΔΩΡΗ”, ΔΙΑΘΕΣΙΜΟ ΣΤΟ http://physicsgg.wordpress.com/category/θερμοδιναμικη/αρχη-καραθεοδωρη
- ΑΠΟΣΤΟΛΟΣ ΔΟΞΙΑΔΗΣ, “Ο ΘΕΙΟΣ ΠΕΤΡΟΣ ΚΑΙ Η ΕΙΚΑΣΙΑ ΤΟΥ ΓΚΟΛΝΤΜΠΑΧ” (2001)

ΥΠΕΥΘΥΝΟΙ ΕΡΓΑΣΙΑΣ:

ΞΕΝΟΦΟΥ ΕΛΕΝΗ

ΠΑΝΑΓΑΚΟΥ ΜΥΡΤΩ- ΓΕΩΡΓΙΑ

ΠΑΠΑΔΑΚΗΣ ΘΑΝΑΣΗΣ

ΠΑΠΟΥΤΣΑΚΗ ΑΝΑΣΤΑΣΙΑ

ΠΕΡΔΕΤΖΟΓΛΟΥ ΕΛΕΝΗ

ΤΕΛΟΣ